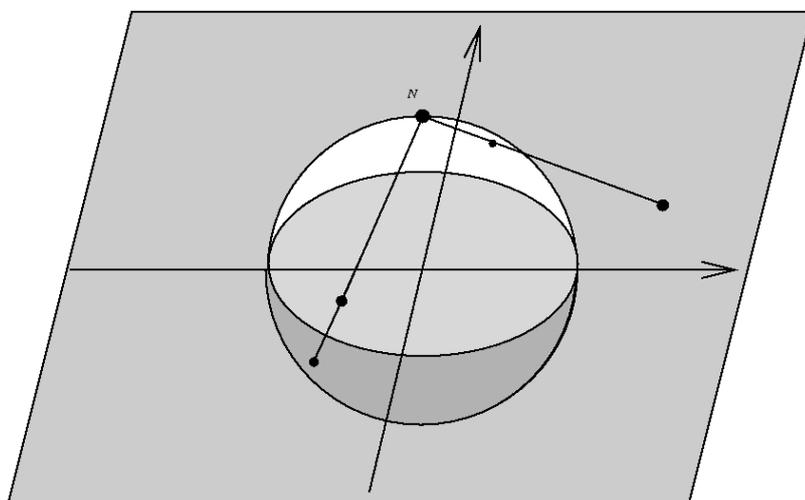


Funktionentheorie 2

Vorlesung von Prof. Dr. N. P. Skoruppa
im Sommersemester 2003
Universität Siegen

In $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ gesetzt von Lars Fischer.



Vorwort

Im Sommersemester 2003 las ich an der Universität Siegen die Funktionentheorie II. Für diese klassische Vorlesung stehen mittlerweile Lehrbücher und Lehrinhalte aus einem Zeitraum von mehr als 100 Jahren zur Verfügung, und so besteht die Leistung des Dozenten ganz wesentlich darin, eine für eine einsemestrige Vorlesung geeignete Auswahl zu treffen. Der Schwerpunkt der vorliegenden Vorlesung sind die elliptischen Funktionen und die Modulformen. Es wird dabei immer wieder der Begriff des Divisors als Mittler zwischen lokalen und globalen Eigenschaften meromorpher Funktionen in den Vordergrund gestellt, und es werden so oft als möglich eine weitergehende Algebraisierung der Theorie und der Begriff der Riemanschen Fläche als nächste Stufe zum Verständnis angedeutet.

Dieses schöne Skript hat Herr Lars Fischer selbständig und lediglich anhand seiner eigenen Notizen zur Vorlesung *ausgearbeitet*. Es wurde von meiner Seite nichts geändert oder hinzugefügt. Daher ist der Untertitel „In \LaTeX gesetzt von Lars Fischer“ übertrieben bescheiden. Allerdings wäre auch schon allein die technische Ausführung in \LaTeX und mit all den hilfreichen Abbildungen eines lobenden Hinweises wert.

Ich möchte Herrn Fischer an dieser Stelle nochmals ganz ausdrücklich für seine Arbeit danken. Mein Dank geht auch an die anderen Hörer meiner Vorlesung: für die Korrekturhinweise zum Skript, die sie Herrn Fischer zukommen liessen, und für die konzentrierte, arbeitsintensive und zugleich menschlich nette Atmosphäre während der Vorlesungen.

Siegen, im September 2003

Nils-Peter Skoruppa

Inhaltsverzeichnis

1	Weierstraßscher Produktsatz	1
1.1	Vorbemerkungen zu Reihen holomorpher Funktionen	1
1.2	Ganze Funktionen sind durch ihre Nullstellen bestimmt	2
1.3	Ganze Funktionen ohne Nullstellen	5
1.4	Wiederholung Analysis I: Unendliche Produkte	5
1.5	Unendliche Produkte holomorpher Funktionen	7
1.6	Beweis des Weierstraßschen Produktsatzes	9
1.7	Beispiele zu dem Weierstraßschen Produktsatz	11
1.7.1	Produktdarstellung des Sinus	11
1.7.2	Die Weierstraßsche σ -Funktion	11
1.7.3	Die Γ -Funktion	15
2	Die Γ-Funktion	17
3	Die Riemannschen Flächen $\bar{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} und \mathfrak{h}	21
3.1	$\bar{\mathbb{C}}$ als Riemannsche Fläche	21
3.2	Meromorphe Funktionen auf $\bar{\mathbb{C}}$	23
3.3	Automorphismen der komplexen Ebene	25
3.4	Die Automorphismen von $\bar{\mathbb{C}}$	27
3.5	Die Automorphismen von \mathfrak{h}	29
3.6	Ergänzungen	32
4	Der Satz von Mittag-Leffler	35
4.1	Die M-L-Teilbruchzerlegung für rationale Funktionen	35
4.2	Die M-L-Teilbruchzerlegung für meromorphe Funktionen	35
4.3	Beispiele zum Satz von Mittag Leffler	36
4.3.1	Der Cotangens	36
4.3.2	Die Weierstraßsche \wp -Funktion	37
5	Elliptische Funktionen	39
5.1	Divisoren auf \mathbb{C}/Γ	39
5.2	Drei der vier Liouvilleschen Sätze	40
5.3	Thetafunktionen	42
5.4	Bestimmung der Hauptdivisoren	45
5.5	Die algebraische Struktur von $Ell(\Gamma)$	48
5.6	\mathbb{C}/Γ als algebraische Struktur	50
5.6.1	Projektive Räume	50

Inhaltsverzeichnis

5.7	\mathbb{C}/Γ als Riemannsche Fläche	57
5.8	Variation des Gitters	60
6	Modulformen	67
6.1	Die Modulgruppe und die obere Halbebene	67
6.2	Modulformen	69
6.3	Die Valenzformel	72
6.4	Der Ring der Modulformen	75
6.5	Ergänzungen	79
6.6	Der Körper der Modulfunktionen	80
6.7	Thetareihen	83
	Symbolverzeichnis	89
	Index	91

1 Weierstraßscher Produktsatz

1.1 Vorbemerkungen zu Reihen holomorpher Funktionen

Seien die (f_n) eine Folge von Funktionen die in der Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ definiert sind.

Definition 1.1. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt **gleichmäßig konvergent** auf K , falls für alle $\epsilon > 0$ ein n_0 existiert, so dass für alle $m \geq n \geq n_0$ gilt:

$$\forall z \in K : \left| \sum_{j=n}^m f_j(z) \right| < \epsilon.$$

Bemerkung:

- Ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergent auf K , dann konvergiert die Reihe $\sum f_n$ gegen eine Grenzfunktion f , d.h. für alle $z \in K$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ konvergent und $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.
- Die gleichmäßige Konvergenz ist gleichbedeutend mit: es gibt ein f auf K , sodass für alle $\epsilon > 0$ ein n_0 existiert, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\forall z \in K \text{ ist } \left| f(z) - \sum_{k=1}^n f_k(z) \right| < \epsilon.$$

- Gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Teilmengen eines Gebietes $G \subseteq \mathbb{C}$ bezeichnet man als **kompakt gleichmäßige Konvergenz in G**

Satz 1.1. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet (**d.h. $G \subseteq \mathbb{C}$ ist offen**), die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiere gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von G gegen eine Grenzfunktion f . Dann gilt

1. Sind alle $f_n (n \geq 1)$ stetig, so ist auch f stetig
2. Sind alle $f_n (n \geq 1)$ stetig und ist γ ein stückweise diffbarer Weg in G , dann gilt $\int_{\gamma} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n$
3. Sind alle f_n holomorph in G , so ist auch f holomorph
4. Sind alle f_n holomorph, so konvergiert $\forall p \geq 0$ die Reihe $\sum f_n^{(p)}$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von G gegen $f^{(p)}$

Beweis. (1.) und (2.) wie in Analysis

zu (3.): Nach dem Satz von Morera ist zu zeigen: $\int_{\gamma} f = 0$ für alle geschlossenen

1 Weierstraßscher Produktsatz

stückweise stetigen Wege γ in G : Aber die f_n sind holomorph, daher ist $\int_\gamma f_n = 0$,

mit (2.) gilt dann $\int_\gamma f = \int_\gamma \sum f_n \stackrel{(2.)}{=} \sum \int_\gamma f_n$.

zu (4.): Sei $z_0 \in G$, sei γ sei Kreis in G um z_0 Dann gilt (Cauchy Formel):

$$\begin{aligned} f^{(p)}(z_0) &= \frac{p!}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{p+1}} d\zeta = \frac{p!}{2\pi i} \int \frac{\sum_{i=1}^{\infty} f_n(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{p+1}} d\zeta \\ &\stackrel{(2.)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{p!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{p+1}}}_{\text{Cauchy: } f_n^{(p)}(z_0)} \end{aligned}$$

Zum Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von G genügt es, diese auf abgeschlossenen Kreisscheiben $K \subseteq G$ nachzuweisen (jede kompakte Teilmenge lässt sich durch Kreisscheiben überdecken): Zu K wähle γ als Kreisbogen mit Mittelpunkt $z \in K$ und Radius R , der außerhalb von K aber innerhalb G verläuft und der Abstand zwischen K und γ sei $\rho > 0$. Dann gilt $\left| \sum_{k=n}^m f_k^{(p)}(z) \right| =$

$$\left| \sum_{k=n}^m \frac{p!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} d\zeta \right| \leq \frac{p!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\left| \sum_{k=n}^m f_k(\zeta) \right|}{|\zeta - z|^{p+1}} |d\zeta| < \frac{p!}{2\pi i} \frac{\epsilon}{\rho^{p+1}} \underbrace{\int_\gamma |d\zeta|}_{=2\pi R} \quad \square$$

Bemerkung: Gibt es zu jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq G$ eine Folge γ_n mit $\gamma_n > 0$, sodass gilt: $|f_n(z)| \leq \gamma_n \forall n, z \in K$ und $\sum \gamma_n < \infty$, dann konvergiert $\sum f_n$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von G (**Normale Konvergenz auf kompakten Teilmengen von G**).

1.2 Ganze Funktionen sind durch ihre Nullstellen bestimmt

Definition 1.2. Eine Funktion heißt **ganz**, falls sie auf ganz \mathbb{C} holomorph ist. Eine Funktion heißt **ganz rational**, falls sie durch ein Polynom gegeben ist, sie heißt **rational**, falls sie Quotient zweier ganz rationaler Funktionen ist.

Weitere Bezeichnungen:

$\text{Hol}(\mathbb{C})$ ist der Ring der ganzen Funktionen. $\text{Mer}(\mathbb{C})$ sind die auf \mathbb{C} meromorphen Funktionen. \mathcal{P} sind die ganzen rationalen Funktionen ($\subseteq \text{Hol}(\mathbb{C})$, Teilring), $\mathcal{P}_{\neq 0}$ ist die multiplikative Halbgruppe der ganz rationalen Funktionen $\neq 0$.

Frage:

Ist $\text{Mer}(\mathbb{C}) \stackrel{?}{=} \text{Quotientenkörper von } \text{Hol}(\mathbb{C})$, d.h. ist jede meromorphe Funktion Quotient von zwei ganzen Funktionen?

Bemerkung: Jede ganz rationale Funktion ist (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten) eindeutig durch die Lage und Vielfachheit ihrer Nullstellen bestimmt. (f ganz rational, a_1, \dots, a_n Nullstellen $\Rightarrow f = \text{const} \cdot \prod_{i=1}^n (X - a_i)$)

Nun folgt eine Präzisierung dieser Bemerkung mittels Divisortheorie:

1.2 Ganze Funktionen sind durch ihre Nullstellen bestimmt

Definition 1.3. Jeder (ganz) rationalen Funktion $f \neq 0$ ordnen wir ihren **Divisor** D_f zu:

$$D_f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{Z}, D_f(z) = \text{Ordnung von } f \text{ bei } z$$

$$\mathcal{D} := \{D_f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{Z} \mid D_f(z) = 0, \text{ bis auf endlich viele Ausnahmen}\}$$

Sei weiter: $\mathcal{D}^+ := \{D \in \mathcal{D} \mid D(z) \geq 0 \forall z \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathcal{D}$
Unterhalbgruppe

Falls Seminarist :

\mathcal{D} ist eine abelsche Gruppe (vermöge $(D_1 + D_2)(z) := D_1(z) + D_2(z)$), die **Gruppe der Divisoren auf \mathbb{C}** . D ist ein Maß für die »Lage und Vielfachheit der Nullstellen«.

Definition 1.4. Eine Sequenz

$$\dots \xrightarrow{\alpha_i} A_i \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \dots$$

heißt **exakt**, falls bei A_i gilt: $\text{Bild}(\alpha_i) = \text{Kern}(\alpha_{i+1})$ und das für alle A_i in der Sequenz.

Satz 1.2. (Präzisierung der obigen Bemerkung) Die Sequenz

$$\mathbf{1} \xrightarrow{\alpha} \underset{\text{I}}{\mathbb{C}^\times} \xrightarrow{\beta} \underset{\text{II}}{\mathcal{P}_{\neq 0}} \xrightarrow{\gamma} \underset{\text{III}}{\mathcal{D}^+} \xrightarrow{\delta} \mathbf{0}$$

von Homomorphismen ist exakt.

Beweis. • exakt bei I bedeutet β ist injektiv: klar, da $\mathbf{1} = \{1\} \ni 1 \mapsto 1 \in \mathbb{C}^\times$

• exakt bei III bedeutet γ ist surjektiv: klar, da δ alle $D \in \mathcal{D}^+$ auf $0 \in \mathbf{0} = \{0\}$ abbildet

• exakt bei II bedeutet: $\text{Kern}(\gamma)$ ist $\text{Bild}(\beta) \simeq \mathbb{C}^\times$

Beweis: β ist injektiv, da β einfach die Einbettung von \mathbb{C}^\times in die Menge der Polynome ist, also $\forall c \in \mathbb{C}^\times : \beta(c) = c \in \mathcal{P}_{\neq 0}$.

γ ist surjektiv, klar, da sich zu einem vorgegebenem $D \in \mathcal{D}^+$ leicht ein Polynom finden lässt, das die Nullstellen mit der richtigen Vielfachheit besitzt.

Nun ist zu zeigen, dass die Sequenz bei II exakt ist: Sei dazu $\gamma : \mathcal{P}_{\neq 0} \longrightarrow \mathcal{D}^+, f \mapsto D_f$.

\Rightarrow : sei $f \in \text{Bild}(\beta)$, dann ist f ein konstantes Polynom $\Rightarrow D_f \equiv 0$.

\Leftarrow : $f \in \text{Kern}(\gamma)$, d.h. $D_f \equiv 0 \Rightarrow f$ hat keine Nullstellen $\Rightarrow f$ ist konstant (folgt mittels Fundamentalsatz der Algebra).

Damit ist die gesamte Sequenz exakt. □

Bemerkung: Der Satz sagt aus: $\mathcal{D}^+ \simeq \mathcal{P}_{\neq 0} / \mathbb{C}^\times$.

Der Satz oben ist für ganz rationale Funktionen ($\mathcal{P}_{\neq 0}, \mathcal{D}^+$) formuliert. Nun wird ein entsprechender Satz für rationale Funktionen angegeben:

1 Weierstraßscher Produktsatz

Satz 1.3. Die Sequenz von Gruppenhomomorphismen

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{C}^\times \xrightarrow{\beta} \{\text{multi. Gruppe der rationalen Funktionen} \neq 0\} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{0}$$

ist exakt.

Beweis. β ist injektiv, trivial (wie oben)

$\gamma : f \mapsto D_f$ ist surjektiv: zu $D \in \mathcal{D}$ definiere $D = D_+ + D_-$ vermöge:

$$D_+(z) := \begin{cases} D(z), & \text{falls } D(z) \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad D_-(z) := \begin{cases} D(z), & \text{falls } D(z) \leq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach dem vorigen Satz lassen sich nun zwei Polynome f, g angeben, mit $D_f = D_+$ und $D_g = -D_-$. Dann ist $D_f - D_g = D_+ + D_-$ und damit ist γ surjektiv.

Noch zu zeigen: $\text{Kern}(\gamma) = \text{Bild}(\beta)$, d.h. eine rationale Funktion ohne Null- oder Polstellen ist konstant. Das folgt aber wie oben. \square

Sei nun $f \neq 0$ eine ganze Funktion:

Definition 1.5. (*Divisor für ganze Funktionen*) Sei $D_f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{Z}$, $D_f(z) = \text{ord}_f(z)$, dann gilt für $D = D_f$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid D(z) \neq 0\} \quad \text{hat keinen Häufungspunkt in } \mathbb{C}. \quad (*)$$

Die Menge ist also diskret. Das ist die Menge der Nullstellen von f .
Definiere nun:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\infty &:= \{D : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{Z} \mid D \text{ erfüllt } (*)\} \\ \mathcal{D}_\mathbb{C}^+ &:= \{D \in \mathcal{D}_\infty \mid D(z) \geq 0 \forall z \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

\mathcal{D}_∞ heißt **Divisor auf \mathbb{C}** .

Satz 1.4. Die Sequenz von Homomorphismen von Halbgruppen

$$\mathbf{0} \longrightarrow 2\pi i\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{additiv}} \text{Hol}(\mathbb{C}) \xrightarrow{h \mapsto e^h} \text{Hol}(\mathbb{C})_{\neq 0} \xrightarrow{f \mapsto D_f} \mathcal{D}_\mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathbf{0}$$

ist exakt.

Folgerungen:

Damit können wir die beiden nächsten Sätze folgern.

Satz 1.5. Jede auf \mathbb{C} meromorphe Funktion f ist Quotient zweier ganzer Funktionen.

1.3 Ganze Funktionen ohne Nullstellen

Beweis. Sei D_f Divisor von f mit $D_f = D_+ + D_-$ (D_+, D_- wie oben). $D_+, -D_- \in \mathcal{D}_\infty^+$. Nach dem Satz existieren dann $h_1, h_2 \in \text{Hol}(\mathbb{C})_+$ mit $D_{h_1} = D_+, D_{h_2} = -D_-$. Dann ist $D_{\frac{h_1}{h_2}} = D_f$. D.h. $\frac{h_1}{h_2}/f \in \text{Hol}(\mathbb{C})$ und $D_{\frac{h_1}{h_2}/f} \equiv 0$, d.h. $\frac{h_1}{h_2}/f = e^h$ mit geeignetem $h \in \text{Hol}(\mathbb{C})$, d.h. $f = \frac{h_1}{h_2 e^h}$, wobei im Zähler und Nenner ganze Funktionen stehen. \square

Satz 1.6. *Die Sequenz von Gruppen*

$$0 \longrightarrow 2\pi i\mathbb{Z} \longrightarrow \text{Hol}(\mathbb{C}) \xrightarrow{h \mapsto e^h} \text{Mer}(\mathbb{C}) \xrightarrow{f \mapsto D_f} \mathcal{D}_\infty \longrightarrow 0$$

ist exakt

Beweis. Analog zum vorigen Beweis, schreibe $D \in \mathcal{D}_\infty$ als $D = D_+ + D_-$. \square

1.3 Ganze Funktionen ohne Nullstellen

Satz 1.7. *Jede ganze Funktion f ohne Nullstellen schreibt sich in der Form $f = e^h$ mit geeigneter Funktion h .*

Beweis. f hat keine Nullstellen, deshalb ist $\frac{f'}{f}$ auf \mathbb{C} holomorph und besitzt die Entwicklung

$$\frac{f'}{f}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad \forall z$$

Setze $h := b_0 + c_0 z + c_1 \frac{z^2}{2} + c_2 \frac{z^3}{3} + \dots$ mit $e^{b_0} = f(0)$ (das geht, da $f(0) \neq 0$ und $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ surjektiv ist). Dann ist $h' = \frac{f'}{f}$, betrachte $g = f e^{-h}$.

Zu zeigen: $g \equiv 1$, d.h. $g(0) = 1$ (ok nach Wahl von b_0) und $g' \equiv 0$:

$$g' = f' e^{-h} + f e^{-h} (-h') = f' e^{-h} - \underbrace{f e^{-h} \frac{f'}{f}}_{= e^{-h} f'} = 0. \quad \square$$

1.4 Wiederholung Analysis I: Unendliche Produkte

Literatur zu diesem Abschnitt: Knopp: Unendliche Reihen und Produkte

Definition 1.6. *Sei (c_n) eine Folge von komplexen Zahlen, dann heißt $\prod_{n=1}^\infty c_n$ (eigentlich) konvergent, falls gilt*

1. $\exists n_0$, sodass $c_n \neq 0 \forall n \geq n_0$
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{n=n_0}^k c_n$ existiert und $\neq 0$ ist

Satz 1.8. *1. Ein konvergentes Produkt ist genau dann 0 , wenn einer seiner Faktoren gleich 0 ist*

1 Weierstraßscher Produktsatz

2. $\prod_{n=1}^{\infty} c_n$ ist konvergent genau dann, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0, r \geq 1 : |c_{n+1} \cdot \dots \cdot c_{n+r} - 1| < \epsilon \quad (*)$$

Folgerung

Mit $r = 1$ in (*) folgt $\prod c_n$ konvergiert $\Rightarrow c_n \rightarrow 1$

Beweis. (von 1.8)

1. klar, folgt aus Definition der Konvergenz für unendliche Produkte

2. Sei o.B.d.A. alle $c_n \neq 0$

\Rightarrow : setze $P_k := \prod_{n=1}^k c_n$, dann ist $|P_k| \geq \sigma > 0$ für $k \gg 0$ und σ geeignet.

Damit: $|c_{n+1} \dots c_{n+r} - 1| = \left| \frac{P_{n+r}}{P_n} - 1 \right| = \frac{|P_{n+r} - P_n|}{|P_n|} \leq \frac{|P_{n+r} - P_n|}{\sigma}$ für $n \gg 0$.

Mit dem Cauchy-Kriterium folgt nun (*).

\Leftarrow : Aus (*) folgt insbesondere die Existenz eines n_0 mit $\left| \frac{P_{n_0+r}}{P_{n_0}} - 1 \right| < \epsilon \forall r \geq 1$.

Es folgt die Existenz von $0 < c_1 < c_2$ mit $c_1 < |P_{n_0+r}| < c_2$ für alle $r \geq 1$ oder

$$c_1 < |P_n| < c_2 \text{ für } n > n_0 \quad (**)$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben: Dann existiert n_0 , sodass für $n \geq n_0, r \geq 1$ gilt:

$$\epsilon > \frac{|P_{n+r} - P_n|}{|P_n|} \geq \frac{|P_{n+r} - P_n|}{c_2} \text{ d.h. } |P_{n+r} - P_n| \leq c_2 \epsilon \text{ für } n \geq n_0, r \geq 1$$

Nach dem Cauchy-Kriterium ist P_n konvergent. □

Definition 1.7. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + c_n)$ heißt **absolut konvergent**, falls $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |c_n|)$ eigentlich konvergent ist.

Satz 1.9. Ist $\prod (1 + |c_n|)$ konvergent, dann ist auch $\prod (1 + c_n)$ konvergent.

Vor dem Beweis noch ein weiterer Satz:

Satz 1.10. Das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + c_n)$ mit $c_n \geq 0 \forall n$ ist konvergent, genau dann wenn $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent ist.

Beweis. (mittels eines Tricks, der unterstrichen ist) Sei wieder $P_n := \prod_{k=1}^n (1 + c_k)$ und $P_0 := 1$. Der Trick ist:

$$\begin{aligned} \underline{P_n - 1} &= P_n - P_{n-1} + P_{n-1} - P_{n-2} + \dots + P_1 - P_0 \\ &= \sum_{k=1}^n P_k - P_{k-1} \quad \overset{P_{k-1}(1+c_k)=P_k}{=} \sum_{k=1}^n \underline{P_{k-1} c_k} \end{aligned}$$

1.5 Unendliche Produkte holomorpher Funktionen

⇐:

$$1 \leq P_k = \prod_{l=1}^k (1 + c_l) \stackrel{1+x \leq e^x}{\leq} e^{\sum_{l=1}^k c_l} \leq e^{\sum_{l=1}^{\infty} c_l} =: \text{const}$$

Die Konvergenz der Reihe wird ja vorausgesetzt. Damit ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1} c_k \leq \text{const} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$$

d.h. das »Partialprodukt« $P_n - 1$ konvergiert.

⇒: Sei nun $\prod(1 + c_k)$ konvergent:

$$\sum_{k=1}^n c_k \stackrel{1 \leq P_k \forall k}{\leq} \sum_{k=1}^n P_{k-1} c_k = P_n - 1 < \infty \forall n \quad \square$$

Beweis. (von 1.9) Sei o.B.d.A. $1 + c_k \neq 0 \forall k$. $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + |c_k|)$ sei konvergent (d.h. $\sum |c_k| < \infty$) und es ist $P_n - 1 \stackrel{\text{Trick}}{=} \sum_{k=1}^n P_{k-1} c_k$.

Zu zeigen: $\sum P_{k-1} c_k$ ist absolut konvergent und damit konvergent.

$$\begin{aligned} \sum |P_{k-1} c_k| &\leq \sum \left(\prod_{l=1}^{\infty} (1 + |c_l|) \right) \cdot c_k \\ &\leq \prod_{l=1}^{\infty} (1 + |c_l|) \sum c_k < \infty \end{aligned}$$

⇒ $\lim P_n =: P$ existiert.

Noch zu zeigen: $P \neq 0$:

$$\begin{aligned} \log \left| \prod_{l=1}^k (1 + c_l) \right| &= \sum_{l=1}^k \log |1 + c_l| \stackrel{\text{asymptot. gleich}}{\sim} \sum_{l=1}^k |c_l| > 0 \\ \text{denn } \log(1 + \gamma) &\sim \gamma \text{ f\u00fcr } \gamma \rightarrow 0 \quad \square \end{aligned}$$

Satz 1.11. Ist $\prod 1 + c_k$ absolut konvergent, so ist f\u00fcr jede Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ist auch das Produkt $\prod(1 + c_{\sigma(k)})$ absolut konvergent und $\prod(1 + c_k) = \prod(1 + c_{\sigma(k)})$

Beweis. Zur\u00fcckf\u00fchren auf den entsprechenden Satz f\u00fcr Reihen. □

Beispiel: 1.1. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$ ist f\u00fcr jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent, denn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2} < \infty$.

1.5 Unendliche Produkte holomorpher Funktionen

Satz 1.12. Sei (f_n) eine Folge von in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorpher Funktionen. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ sei gleichm\u00e4\u00dfig konvergent auf kompakten Teilmengen von G .

1 Weierstraßscher Produktsatz

1. Dann ist $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z)) \forall z \in G$ konvergent. Die Grenzfunktion $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ ist holomorph.
2. Es ist $f(z) = 0 \Leftrightarrow 1 + f_n(z) = 0$ für ein n
3. Ordnung von f bei $z \in G$ ist gleich $\sum_{n=1}^{\infty} (\text{Ordnung von } f_n(z) \text{ bei } z)$

Beispiel: 1.2. $\prod(1 - \frac{z^2}{n^2})$ ist holomorph, Nullstellen: $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, Ordnung 1.

Beweis. (von 1.: Die Grenzfunktion $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ ist holomorph. Die übrigen Punkte sind klar.) Sei $K \subseteq G$ kompakt, dann existiert ein m , sodass für $n \geq m, r \geq 1 \sum_{k=n}^{n+r} |f_k(z)| \leq \frac{1}{2}$ (denn $\sum |f_n|$ ist gleichmäßig konvergent). Betrachte $P_n := \prod_{k=m+1}^n (1 + f_k)$: P_n ist holomorph, zeige: $\lim P_n$ ist ebenfalls holomorph, sei dazu $n \geq m$:

$$\begin{aligned} P_n - P_m &= P_n - P_{n-1} + P_{n-1} - P_{n-2} + \dots + P_{n+1} - P_m \\ &= \sum_{k=m+1}^n (P_k - P_{k-1}) \stackrel{P_k = P_{k-1}(1+f_k)}{=} \sum_{k=m+1}^n P_{k-1} \cdot (f_k) \end{aligned}$$

Wir zeigen: die Reihe ist gleichmäßig konvergent auf K :

$$\begin{aligned} |P_{k-1}| &\leq \prod_{l=m+1}^{k-1} (1 + |f_l|) \stackrel{u \leq 0 \Rightarrow 1+u \leq e^u}{\leq} \prod_{l=m+1}^{k-1} e^{|f_l(z)|} \\ &= e^{\sum_{l=m+1}^{k-1} |f_l(z)|} < e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Damit $\sum_{k=m+1}^n |P_{k-1}(z)f_k(z)| \leq e^{\frac{1}{2}} \sum_{k=m+1}^n |f_k(z)|$. Damit ist die Reihe auf der linken Seite gleichmäßig konvergent, da es die Reihe auf der rechten Seite ist. Also hat $\sum_{k=m+1}^n P_{k-1}f_k$ eine holomorphe Grenzfunktion, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} (P_n - P_m)$ ist holomorph. \square

Satz 1.13. Sei (f_n) eine Folge von in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorpher Funktionen. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ sei gleichmäßig konvergent auf kompakten Teilmengen von G . Dann ist die Reihe $\sum_{n \geq 1} \frac{f'_n}{1+f_n}$ absolut konvergent auf Teilmengen G' , wobei $G' = G \setminus \{\text{Nullstellen von } f\}$. Für jedes $z \in G'$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_n(z)}{1+f_n(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)}$, wobei $f = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n)$.

Bemerkung: G' ist offene Menge: Ist $z_0 \in G'$, so existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $\{z \in G \mid |z - z_0| < \epsilon\} \subseteq G'$.

Beweis. Mit den Bezeichnungen des vorigen Beweises: Sei $P_n := \prod_{l=m+1}^n (1 + f_l)$, $f = (1 + f_1) \cdot \dots \cdot (1 + f_n) \cdot F_m$, wobei $F_m := \prod_{l=m+1}^{\infty} (1 + f_l)$. Auf G' :

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f} &= \frac{f'_1}{1 + f_1} + \dots + \frac{f'_m}{1 + f_m} \\ F_m &= \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n - P_m) = \lim \sum_{k=m+1}^n P_{k-1}f_k = \sum_{k=m+1}^{\infty} P_{k-1}f_k \end{aligned}$$

Die Reihe ist absolut und gleichmäßig konvergent auf kompakten Teilmengen von G' . Daher gilt:

$$F'_m = \lim_n \sum_{k=m+1}^{\infty} (P_{k-1}f_k)' = \lim_n P'_n - \lim_{P_m=1 \Rightarrow P'_m=0} P'_m = \lim_n P'_n$$

Damit:

$$\frac{F'_m}{F_m}(z) = \lim_n \frac{P'_m}{P_m}(z) = \sum_{l=m+1}^n \frac{f'_l(z)}{1+f_l(z)} = \sum_{l=m+1}^{\infty} \frac{f'_l}{1+f_l(z)}$$

Zur gleichmäßigen absoluten Konvergenz auf kompakten Teilmengen $K \subseteq G'$: Sei $K \subseteq G'$ kompakt: Sei $\gamma_l := \min_{z \in K} |1+f_l(z)|$. Es gibt in G' keine Nullstellen von $f \Rightarrow \gamma_l > 0$. Für $l \gg 0$ ist $\gamma_l \gg \frac{1}{2}$ (da für $l \gg 0$ $|f_l(z)| < \frac{1}{2}$ ist, ist $1+f_l(z) \geq 1-|f_l(z)| > \frac{1}{2}$).

Also existiert ein $\gamma > 0$ mit $\gamma_l > \gamma \forall l$. Damit gilt auf K : $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{|f'_l(z)|}{|1+f_l(z)|} \leq \frac{1}{\gamma} \sum_{l=1}^{\infty} |f'_l(z)|$

Aber $\sum |f'_l|$ ist gleichmäßig konvergent auf kompakten Teilmengen von G' , da $\sum_{l=1}^{\infty} |f_l|$ gleichmäßig konvergent auf kompakten Teilmengen ist. \square

1.6 Beweis des Weierstraßschen Produktsatzes

Sei $D \in \mathcal{D}_{\infty}^+$ (d.h. $D : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{Z}, D(z) \geq 0 \forall z, T := \{z \in \mathbb{C} \mid D(z) > 0\}$ hat keinen Häufungspunkt in \mathbb{C}). Zu konstruieren ist ein $f \in \text{Hol}(\mathbb{C})$ mit $D_f = D$.

T ist abzählbar: jeder Kreis um 0 enthält nur endlich viele Punkt von T , sonst gäbe es Häufungspunkte. Sei z_1, z_2, \dots eine Aufzählung von T , da (z_n) keine Häufungspunkte in \mathbb{C} hat, gilt $\lim_n |z_n| = \infty$ (fast alle Folgeglieder liegen außerhalb eines Kreises um 0 mit Radius r). Sei $\alpha_n := D(z_n)$. O.B.d.A. sei $z_n \neq 0 \forall n$, sonst multipliziert man z_n mit der nötigen Vielfachheit an die konstruierte Funktion heran.

Idee: $\prod (z - z_n)^{\alpha_n}$, konvergiert im Allgemeinen nicht, besser ist $\prod (1 - \frac{z}{z_n})^{\alpha_n}$, aber auch das konvergiert im Allgemeinen nicht.

Weierstraß: Wähle $k_1, k_2, \dots \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, sodass gilt $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu} \frac{z}{z_{\nu}}^{k_{\nu}+1}$ ist absolut konvergent $\forall z \in \mathbb{C}$. Setze damit

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{z_{\nu}}\right) e^{\frac{z}{z_{\nu}} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_{\nu}}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k_{\nu}} \left(\frac{z}{z_{\nu}}\right)^{k_{\nu}}} \right)^{\alpha_{\nu}} =: \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$$

(Ist $k_{\nu} = 0$, so gilt die Konvention $e^{\frac{z}{z_{\nu}} + \dots} = e^0 = 1$).

Wir zeigen $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ ist gleichmäßig konvergent auf kompakten Teilmengen von \mathbb{C} : $f_n(z) = \left[\left(1 - \frac{z}{z_{\nu}}\right) e^{\frac{z}{z_{\nu}} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_{\nu}}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k_{\nu}} \left(\frac{z}{z_{\nu}}\right)^{k_{\nu}}} \right]^{\alpha_{\nu}} - 1$. Sei $R > 0$. Wir wollen gleichmäßige Konvergenz von $\sum |f_{\nu}|$ auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ nachweisen.

Sei m so gewählt, dass für $\nu > m$ gilt:

$$\left| \frac{R}{z_{\nu}} \right| \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \alpha_{\nu} \left(\frac{R}{|z_{\nu}|} \right)^{k_{\nu}+1} < \frac{1}{2}$$

1 Weierstraßscher Produktsatz

Zur Abkürzung setze $u := \frac{z}{z_\nu}$, $k := k_\nu$, $\alpha := \alpha_\nu$ (also $|u| < \frac{1}{2}$, $\alpha |u|^{k+1} < \frac{1}{2}$).

$$|f_\nu(z)| = \left| \left[(1-u)e^{u+\frac{1}{2}u^2+\dots+\frac{1}{k_\nu}u^k} \right]^{\alpha_\nu} - 1 \right| \quad (*)$$

Feststellung:

$(1-u) = e^{-u-\frac{1}{2}u^2-\dots-\frac{1}{k}u^k-\dots}$, da $\log(1-u) = -u-\frac{u^2}{2}-\dots-\frac{u^k}{k}-\dots$. Diese Beobachtung liegt der Idee von Weierstraß zu Grunde.

Daher ist

$$\begin{aligned} (*) &= \left| e^{\alpha\left(-\frac{u^{k+1}}{k+1}-\dots\right)} - 1 \right| \\ &\leq e^{\alpha\left(\frac{|u|^{k+1}}{k+1}+\dots\right)} - 1 \quad , \text{ denn } |e^w - 1| = \left| w + \frac{w^2}{2!} + \dots \right| \leq |w| + \left| \frac{w^2}{2!} \right| + \dots = e^{|w|} - 1 \\ &\leq e^{\alpha|u|^{k+1}(1+|u|+|u|^2+\dots)} - 1 \\ &\leq e^{2\alpha|u|^{k+1}} - 1 \quad , \text{ denn } 1 + |u| + |u|^2 + \dots = \frac{1}{1-|u|} < 2, \text{ für } |u| < \frac{1}{2} \\ &\leq 2\alpha |u|^{k+1} \underbrace{e^{2\alpha|u|^{k+1}}}_{\leq e^3} \quad , \text{ denn } e^x - 1 \leq x + \frac{x^2}{2!} + \dots \leq x(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots) = xe^x \\ &\leq 6\alpha |u|^{k+1} \quad , \text{ wobei } u = \frac{z}{z_\nu}, |z| < R \\ &\leq 6\alpha_\nu \left(\frac{R}{z_\nu}\right)^{k_\nu+1} \end{aligned}$$

Aber $6 \sum \alpha_\nu \left(\frac{R}{z_\nu}\right)^{k_\nu+1} < \infty$, damit ist $\sum |f_\nu|$ gleichmäßig konvergent, und damit konvergiert das Produkt und der Satz ist bewiesen. \square

Bemerkung: Die Wahl $k_\nu := \alpha_\nu + \nu$ ist stets ausreichend:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=l}^{\infty} \left| \alpha_\nu \left(\frac{z}{z_\nu}\right)^{\alpha_\nu+\nu+1} \right| &\leq \underbrace{\frac{z}{z_\nu} < \frac{1}{2} \text{ für } \nu > l}_{\leq} \sum_{\nu=l}^{\infty} \left| \alpha_\nu \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_\nu+\nu+1} \right| \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{\alpha_\nu 2^{\alpha_\nu}} < 1}_{\leq} \sum_{\nu=l}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+1} < \infty \end{aligned}$$

1.7 Beispiele zu dem Weierstraßschen Produktsatz

1.7.1 Produktdarstellung des Sinus

$$D_{\sin(\pi \cdot)}(z) = \begin{cases} 0 & \text{sonst} \\ 1 & z \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Zu betrachten ist: $\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left(\frac{z}{n}\right)^2$ ist absolut konvergent $\forall z \in \mathbb{C}$. Nach Weierstraß ist

$$f(z) = z \prod_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left[\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \right]$$

holomorph in \mathbb{C} und $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{\sin(\pi \cdot)}$. (Das Produkt wird mit z multipliziert, weil der sin eine Nullstelle bei 0 benötigt.)

Fazit: $\sin(\pi z) = e^h f(z)$ mit einer geeigneten ganzen Funktion h .

Satz 1.14. $\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \left(1 - \frac{z}{-n}\right) e^{-\frac{z}{-n}} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

(Auf der linken Seite wurde $\sin \pi z$ durch π geteilt, damit die Taylor Entwicklung mit z und nicht πz beginnt. Der Beweis für diesen Satz folgt an späterer Stelle.)

Bemerkung: Für $z = \frac{1}{2}$ folgt:

$$\pi = 2 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{4n^2}} = 2 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}$$

Diese Darstellung von π heißt **Wallis Produkt**.

1.7.2 Die Weierstraßsche σ -Funktion

Definition 1.8. Eine Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ heißt **diskret**, falls $\forall z \in \mathbb{C}$ existiert eine offene Umgebung U von z mit $U \cap \Gamma \subseteq \{z\}$.

Bemerkung: Ist $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ diskret, dann ist \mathcal{D}_Γ mit $\mathcal{D}_\Gamma = \begin{cases} 1 & z \in \Gamma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ein Element von \mathcal{D}_∞ .

Satz 1.15. Sei Γ eine diskrete Untergruppe. Dann gilt:

1. $\Gamma = \mathbb{Z}\omega$ für ein $\omega \in \mathbb{C}$

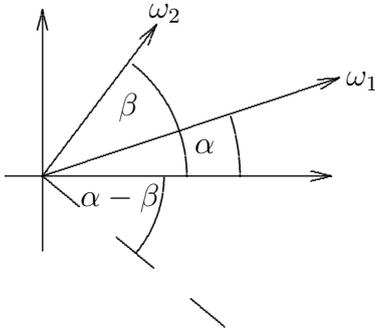
oder

2. $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ mit geeigneten $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $\omega_1, \omega_2 \neq 0$ und $\Im\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \neq 0$. (Dabei bedeutet $\Im z$ den Imaginärteil von z)

Bemerkung:

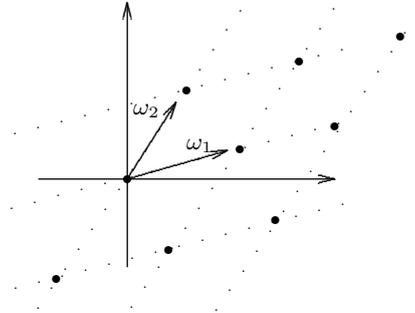
1. $\Im\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \omega_1, \omega_2$ sind linear unabhängig über \mathbb{R} . Bzw. $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ liegt nicht auf der reellen Achse (siehe Abbildung 1.1).
2. Ein Γ wie in 2. heißt **(vollständiges) Gitter** (siehe Abbildung 1.2)

Abbildung 1.1:



Sind α und β die Winkel, die zu ω_1 bzw. ω_2 gehören, so liegt $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ auf der gestrichelten Linie. Sind ω_1 und ω_2 kollinear, so liegt $\alpha - \beta$ auf der reellen Achse.

Abbildung 1.2:



Ein vollständiges Gitter besteht aus den Punkten, an denen sich die gepunkteten Linien schneiden.

Beweis. Ist $\Gamma = \{0\}$, so ist $\Gamma = \mathbb{Z}0$.

Sei nun $\Gamma \neq \{0\}$, also sei $\omega \in \Gamma$ und $\omega \neq 0$ wobei $|\omega|$ minimal ist (ein solches minimales ω existiert, da Γ diskret ist: es gibt eine offene Umgebung von 0, die nur endlich viele Punkte von Γ enthält).

Dann ist $\mathbb{R}\omega \cap \Gamma = \mathbb{Z}\omega$. (Ist $\gamma \in \mathbb{R}\omega$, so ist $\gamma = \eta\omega + \vartheta\omega$ mit $\eta \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq \vartheta < 1$, dann ist aber $|\vartheta\omega| = |\vartheta| |\omega| < |\omega|$. Folglich ist $\vartheta = 0$, da ω minimal gewählt war.)

Ist $\Gamma = \mathbb{Z}\omega$, so ist der erste Fall gezeigt! Ist hingegen $\Gamma \neq \mathbb{Z}\omega$, so sind wir im zweiten Fall:

Wähle jetzt ein $\omega_2 \in \Gamma \setminus \mathbb{Z}\omega$, wobei ω_2 wieder minimal gewählt sei. Das ω von oben wird nun mit ω_1 bezeichnet.

Wir zeigen: $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$: sei $\alpha \in \Gamma$, schreibe $\alpha = (m + \vartheta_1)\omega_1 + (n + \vartheta_2)\omega_2$, wobei $m, n \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq \vartheta_1, \vartheta_2 < 1$ sei. Setze $\gamma := \vartheta_1\omega_1 + \vartheta_2\omega_2$, zu zeigen ist: $\gamma = 0$.

Jedenfalls ist $\gamma \in \Gamma$, damit ist entweder $\gamma = 0$ oder $\vartheta_1\vartheta_2 \neq 0$ (falls nur ein $\vartheta_i = 0$ ist, würde das die Minimalität des entsprechenden ω_i verletzen).

Sei nun $A = \{\phi_1\omega_1 + \phi_2\omega_2 \mid \phi_1 + \phi_2 \leq 1\}$ (siehe Abbildung 1.3).

Wir betrachten die Fälle:

$\gamma \in A$: Es gilt:

$$|\gamma| \leq |\phi_1| |\omega_1| + |\phi_2| |\omega_2| \leq (\phi_1 + \phi_2) |\omega_2|$$

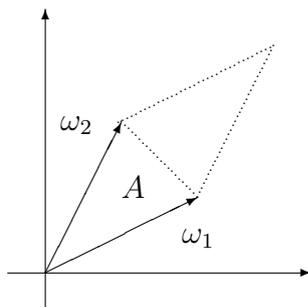


Abbildung 1.3: A ist die konvexe Menge in der unteren Hälfte des Parallelogramms inklusive der gestrichelten Diagonale .

Die letzte Abschätzung nutzt aus, dass $|\omega_1| \leq |\omega_2|$ gilt, da $|\omega_2|$ »nur« minimal in $\Gamma \setminus \mathbb{Z}\omega_1$ ist. Nun folgt $\underbrace{(\vartheta_1 + \vartheta_2)}_{\leq 1} |\omega_2| \leq |\omega_2|$.

$\gamma = \omega_2$ ist ausgeschlossen, da $\vartheta_2 < 1$ war. Ebenso scheidet $\gamma = \omega_1$ aus, da auch $\vartheta_1 < 1$ war. Der Fall $0 < |\gamma| < |\omega_2|$ verletzt die Minimalität von ω_2 . Es bleibt nur $\gamma = 0$.

$\gamma \notin A$: Dann ist $\gamma' := \omega_1 + \omega_2 - \gamma \in A$. $\gamma' = (1 - \vartheta_1)\omega_1 + (1 - \vartheta_2)\omega_2$, mit $1 - \vartheta_1 + 1 - \vartheta_2 < 1$
Es ist $\gamma' \in \Gamma$, wegen

$$\begin{aligned} |\gamma'| &\leq (1 - \vartheta_1) |\omega_1| + (1 - \vartheta_2) |\omega_2| \\ &\leq \underbrace{(1 - \vartheta_1 + 1 - \vartheta_2)}_{< 1} |\omega_2| \\ &< |\omega_2| \end{aligned}$$

Wie oben folgt $\gamma' = 0$.

Damit ist dann $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2!$ □

Bemerkung: ω_1, ω_2 sind nicht eindeutig durch Γ bestimmt, z. B. ist $\Gamma = \mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot i = \mathbb{Z} \cdot (1 + i) + \mathbb{Z} \cdot i$.

Gesucht ist nun eine Funktion σ mit $D_\sigma(z) = \begin{cases} 1 & z \in \Gamma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Lemma 1.1. $\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq 0}} \left(\frac{z}{\gamma}\right)^3$ ist absolut konvergent für jedes $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Zu zeigen ist $\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq 0}} \left(\frac{z}{\gamma}\right)^3 < \infty$. Setze $P_n := \{x\omega_1 + y\omega_2 \mid (|x| = n \wedge |y| \leq n) \vee (|x| \leq n \wedge |y| = n)\}$ (siehe Abbildung 1.4).

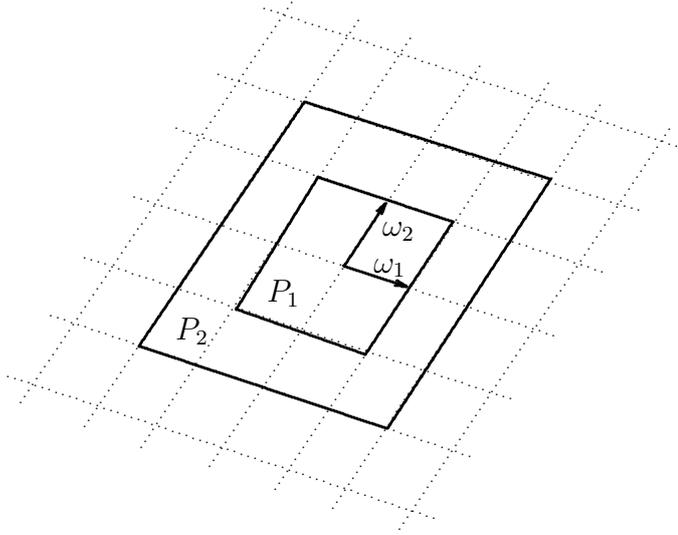


Abbildung 1.4: Die P_n sind konzentrische Parallelogramme.

$\gamma = x\omega_1 + y\omega_2 \in P_n, |\gamma| > nh$, wobei $h := \min(|\omega_1|, |\omega_2|)$. Damit

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \frac{1}{|\gamma|^3} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma \in P_n} \frac{1}{|\gamma|^3} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\#P_n}{n^3 h^3} \leq \frac{8}{h^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty, \\ &\text{da } \#P_n = 8n. \end{aligned} \quad \square$$

Definition 1.9. $\sigma(z, \Gamma) = z \prod_{\gamma \in \Gamma} \left[\left(1 - \frac{z}{\gamma}\right) e^{\frac{z}{\gamma} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2} \right]$ heißt **Weierstraßsche σ -Funktion**.

Bemerkung: Das Produkt ist nach dem vorigen Lemma und dem Satz von Weierstraß absolut konvergent, für jedes z . σ ist eine holomorphe Funktion in \mathbb{C} , die Nullstellen sind die Punkte von Γ , sie sind von erster Ordnung.

Ausblick:

1. $D_\sigma = D_{\sigma(\cdot + \gamma, \Gamma)}$, $\gamma \in \Gamma$ ist fix, d.h. wir betrachten den Fall $f(z) = \sigma(z + \gamma, \Gamma)$ ($f(z_0) = 0 \Leftrightarrow z_0 + \gamma \in \Gamma \Leftrightarrow z_0 \in \Gamma$), also nach dem Satz von Weierstraß ist $\sigma(z, \Gamma) e^{h_\gamma(z)} = \sigma(z + \gamma, \Gamma)$. Es wird sich herausstellen, dass $h_\gamma(z)$ ein quadratisches Polynom in z ist.
2. $\sigma(z, \Gamma)$, als Funktion von z und Γ , ist eine so genannte **Jacobi-Funktion**.

1.7.3 Die Γ -Funktion

Definition 1.10. (nach C. F. Gauß)

$$\Gamma(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \cdot \dots \cdot (z+n)}$$

für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$

Satz 1.16. Der Limes existiert $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Es gilt

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{C \cdot z} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

Das ist die »Definition nach Euler«. Die Konstante ist $C = \lim_n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right) \approx 0,57721\dots$, die **Euler-Mascheronische Konstante**.

Insbesondere ist $\Gamma(z)$ meromorph auf \mathbb{C} , hat Pole erster Ordnung in $\mathbb{Z}_{\leq 0}$, und $\Gamma(z)$ hat keine Nullstellen.

Beweis. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^2$ ist absolut konvergent $\forall z \in \mathbb{C}$. Daher ist $f(z) := z \prod \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent und holomorph in \mathbb{C} . $f(z)$ hat Nullstellen erster Ordnung bei $\mathbb{Z}_{\leq 0}$.

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{z(z+1) \cdot \dots \cdot (z+n)}{n! n^z} &= \lim_n \frac{z(1+z)(1+\frac{z}{2}) \cdot \dots \cdot (1+\frac{z}{n})}{n^z} \quad \text{mit } n^z = e^{z \log n}: \\ &= \lim_n \exp \left(\left(z \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \log n \right) \right) z(1+z) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{z}{n} \right) \exp \left(- \left(\frac{z}{1} + \dots + \frac{z}{n} \right) \right) \\ &= \exp \left(z \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right) \right) f(z) \\ &= e^{z \cdot C} f(z) \end{aligned}$$

□

2 Die Γ -Funktion

$$\Gamma(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdot \dots \cdot (z+n)} = e^{-C \cdot z} \left[z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}} \right]^{-1}$$

Eigenschaften:

- Funktionalgleichung: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

Beweis:

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{z+1}}{(z+1)(z+2) \cdot \dots \cdot (z+n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{z+n+1} \cdot z \cdot \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdot \dots \cdot (z+n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n}{z+n+1}}_{\lim=1} \cdot z \cdot \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdot \dots \cdot (z+n)} \\ &= z\Gamma(z) \end{aligned}$$

- Spezielle Werte:

- $\Gamma(1) = 1$ (Einsetzen in die Gauß-Definition)
- $\Gamma(n+1) = n!$ (Einsetzen in die Funktionalgleichung)

- $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$

(*)

Beweis:

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(1-z) &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^z}{z(1+z)(1+\frac{z}{2}) \cdot \dots \cdot (1+\frac{z}{n})} \cdot \frac{n! n^{1-z}}{(1-z)(1-z+1) \cdot \dots \cdot (1-z+n)} \right) \\ &= \frac{n^{1-z}}{(1-z)(1-\frac{z}{2}) \cdot \dots \cdot (1-\frac{z}{n})} \frac{1}{n+1-z} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z(z-z^2)(1-(\frac{z}{2})^2) \cdot \dots \cdot (1-(\frac{z}{n})^2)} \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi z} \end{aligned}$$

- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, da $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \pi$ (nach (*)) und $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$ nach der Gauß Definition.

- $\text{Res}_{z=-\nu} \Gamma(z) = \frac{(-1)^\nu}{\nu!}$ ($\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)

Beweis: Unter Beachtung von $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \dots = \frac{\Gamma(z+\nu+1)}{z(z+1) \cdot \dots \cdot (z+\nu)}$

2 Die Γ -Funktion

ergibt sich durch Einsetzen von $z = -\nu$ und nach Kürzen von $(z + \nu)$:

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow \nu} \Gamma(z) &= \frac{\Gamma(1)}{-\nu(-\nu+1) \cdot \dots \cdot (-\nu+\nu-1)} \\ &= \frac{(-1)^\nu}{\nu(\nu-1) \cdot \dots \cdot 1}\end{aligned}$$

- Für $z = x + iy$ mit $x = \Re(z) > 0$ ist $|\Gamma(z)| \leq |\Gamma(x)|$

Beweis:

$$\left| \frac{n!n^z}{z(z+1) \cdot \dots \cdot (z+n)} \right| \leq \left| \frac{n!n^x}{x(x+1) \cdot \dots \cdot (x+n)} \right|$$

wegen

$$\left| e^{(x+iy)\log n} \right| = \left| e^{x \log n} \right|, \text{ denn } \left| e^{iy \log n} \right| = 1, \text{ und } |z|^2 = x^2 + y^2 \geq x^2$$

Damit wird:

$$|\Gamma(z)| = \lim \left| \frac{n!n^z}{z(z+1) \cdot \dots \cdot (z+n)} \right| \leq \lim \left| \frac{n!n^x}{x(x+1) \cdot \dots \cdot (x+n)} \right| = |\Gamma(x)|$$

- $\forall \beta < a \leq b$ existiert eine Konstante M , sodass $|\Gamma(z)| \leq M$ für $a \leq \Re(z) \leq b$.
D.h. Γ ist auf senkrechten vertikalen Streifen beschränkt (siehe Abbildung 2.1).
(Folgt aus der vorigen Eigenschaft.)

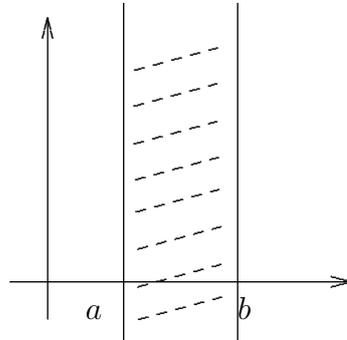


Abbildung 2.1: Γ ist auf dem gestrichelten Streifen beschränkt

Satz 2.1. Sei $\hat{f}(z)$ holomorph in $1 - \epsilon \leq \Re(z) \leq 2 + \epsilon$ für ein $\epsilon > 0$. Es gelte

1. $\hat{f}(z+1) = z\hat{f}(z) \forall z$ mit $1 - \epsilon \leq \Re(z), \Re(z+1) \leq 2 + \epsilon$
2. $|\hat{f}(z)|$ sei beschränkt in $1 \leq \Re(z) \leq 2$
3. $\hat{f}(1) = 1$

Dann kann man \hat{f} (eindeutig) zu einer in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ holomorphen Funktion f fortsetzen und es gilt $f \equiv \Gamma$.

Beweis. Definiere f für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ als:

$$f(z) := \begin{cases} (z-1) \cdot \dots \cdot (z-n) \hat{f}(z-n), & \text{falls } n+1-\epsilon \leq \Re(z) \leq n+2\epsilon \\ \frac{\hat{f}(z+n)}{z(z+1) \cdot \dots \cdot (z+n-1)}, & \text{falls } -n+1-\epsilon \leq \Re(z) \leq -n+2+\epsilon \ (n > 0) \end{cases}$$

Mit (1.) folgt dass f wohldefiniert ist. Es ist f holomorph. In $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ hat f Pole, und zwar von erster Ordnung. Für das $\text{Res}_{z=-n} f$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=-n} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow -n} \frac{(z+n)f(z+n+1)}{z(z+1) \cdot \dots \cdot (z+n)} = \frac{f(1)}{(-n)(-n+1) \cdot \dots \cdot (-n+n-1)} \\ &= \frac{f(1)(-1)^n}{n!} \stackrel{f(1)=1}{=} \frac{(-1)^n}{n!} \end{aligned}$$

Es gilt $f(z+1) = zf(z) \forall z$ (zunächst nur für $\Re(z) = 1$ nach (1.), nach dem Identitätssatz für analytische Funktionen dann überall).

Setze $g(z) := \Gamma(z) - f(z)$, dann ist g holomorph in ganz \mathbb{C} (die Hauptteile heben sich gegenseitig auf) und $g(z+1) = zg(z) \forall z$ und $g(1) = 0$.

Setze $s(z) := g(z) \cdot g(1-z)$. s ist periodisch mit Periode 2:

$$\begin{aligned} s(z+1) &= g(z+1)g(-z) = zg(z) \frac{g(z-1)}{-z} \\ &= -s(z) \\ \text{also: } s(z+2) &= -s(z+1) = -(-s(z)) \end{aligned}$$

Ferner ist $s(z)$ beschränkt: $g(z) = g(x+iy)$ ist beschränkt in $B = \{z = x+iy \mid 0 \leq x \leq 1, |y| \geq 1\}$ (siehe Abbildung 2.2), weil $|g(z)| = \left| \frac{g(z+1)}{z} \right| \leq K$ nach (2.) und $|\Gamma(z)| \leq \Gamma(x)$ für $1 \leq \Re(z) \leq 2$. Ferner ist $g(z)$ holomorph, also auch beschränkt in $0 \leq x \leq 1, |y| \leq 1$. Fazit $g(1-z) \leq K$ in $0 \leq x \leq 1$. Dann ist auch $g(1-z) \leq K$ (Spiegelung an $\frac{1}{2}$). Also ist $s(z) \leq |g(z)| \cdot |g(1-z)| \leq K^2$ in $0 \leq x \leq 1$. Da $|s(z)|$ die Periode 1 hat, folgt $|s(z)| \leq K^2 \forall z \in \mathbb{C}$.

Also ist s nach Liouville konstant. $s(1) = \underbrace{g(1)}_{=0} g(0) \Rightarrow s \equiv 0$. Aus $0 \equiv s(z) = g(z)g(z-1)$ folgt $g \equiv 0$ (als Übungsaufgabe). \square

Satz 2.2. Für $\Re(z) > 0$ gilt:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

2 Die Γ -Funktion

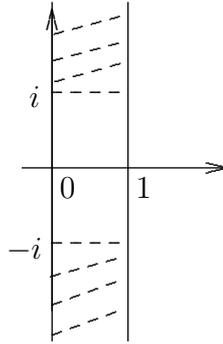


Abbildung 2.2: g ist in dem gestrichelten Bereich B beschränkt.

Beweis. (Nachweis der Konvergenz des Integrals: Analysis) Sei $f(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^z \frac{dt}{t}$. Dann ist f holomorph in $\Re(z) > 0$ (siehe Übung).

$$|f(z)| \leq \int_0^\infty \left| e^{-t} t^z \right| \frac{dt}{t} = \int_0^\infty e^{-t} t^x \frac{dt}{t}$$

wegen: $|e^{(x+iy) \log t}| = |e^{x \log t}|$, denn $|e^{iy \log t}| = 1$

Insbesondere ist $f(z)$ beschränkt in $1 \leq x \leq 2$

$$f(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

$$f(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z+1} \frac{dt}{t}$$

partielle Integration:

$$\underbrace{\left[-e^{-t} t^z \right]_0^\infty}_{=0} + z \int_0^\infty e^{-t} t^z \frac{dt}{t}$$

$$= z f(z)$$

Nach dem vorangegangenen Satz ist dann $f \equiv \Gamma$. □

In Abramowitz, Stegun: »Handbook of mathematical functions«, Seite 255 ff. finden sich weitere Formeln:

Duplication Formula: $\Gamma(2z) = \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)(2\pi)^{-\frac{1}{2}} 2^{2z-\frac{1}{2}}$

Triplcation Formula: $\Gamma(3z) = (2\pi)^{-1} \cdot 3^{(3z-\frac{1}{2})} \cdot \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{3}\right)\Gamma\left(z + \frac{2}{3}\right)$

n-Formula: $\Gamma(nz) = (2\pi)^{\left(\frac{1}{2}(1-n)\right)} \cdot n^{(nz-\frac{1}{2})} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right)$

Stirlingsche Formel: $\Gamma(z) \sim e^{-z} e^{z-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}}$ für $|z| \rightarrow \infty, |\arg(z)| < \pi$

log. Ableitung: $\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$

3 Die Riemannschen Flächen $\overline{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} und \mathfrak{h}

3.1 $\overline{\mathbb{C}}$ als Riemannsche Fläche

Sei f ganz auf \mathbb{C} , betrachte die Funktion $g(z) := f(\frac{1}{z})$, $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$. g ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. g hat die Laurent-Entwicklung $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$, d.h. $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n}$ (»Laurent-Entwicklung von f bei ∞ «).

Fall 1: Es gibt unendlich viele $a_n \neq 0, n \in \mathbb{Z}_{<0}$, f hat eine **wesentliche Singularität bei ∞**

Fall 2: sonst: $ord_{\infty} f := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\}$, Sprechweisen:

$$ord_{\infty} f \begin{cases} > 0 & : \infty \text{ ist Nullstelle von } f, & f \text{ ist holomorph bei } \infty \\ < 0 & : \infty \text{ ist Pol,} & f \text{ ist meromorph} \\ = 0 & : a_0 := f(\infty), & f \text{ ist holomorph bei } \infty \end{cases}$$

Beispiel: 3.1. • $f(z) = a_n z^n + \dots + a_0, a_n \neq 0$, ein Polynom. $g(z) = f(\frac{1}{z}) = a_n \frac{1}{z^n} + \dots + a_0$, $ord_{\infty} f = -n = -grad f$

•

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z - 17} \\ g(z) &= f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\frac{1}{z} - 17} = z \frac{1}{1 - 17z} = z(1 + 17z + \dots) \\ &= ord_{\infty} f = 1 \end{aligned}$$

Definition 3.1. $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ heißt *offen*, gdw.

$$\begin{cases} U \subseteq \mathbb{C} \text{ ist offen} \\ \text{oder} \\ \infty \in U, \text{ und } \mathbb{C} \setminus (U \setminus \{\infty\}) \text{ ist kompakt} \end{cases}$$

Bemerkung:

1. Offene Menge in $\overline{\mathbb{C}}$ sind $U \subseteq \mathbb{C}$, wobei U offen ist oder $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$, wobei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt.
2. Ist $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ offene Umgebung von ∞ , dann ex. ein $R > 0$, sodass $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \subseteq U$ ist
3. $\overline{\mathbb{C}}$ ist kompakt (d.h. ist $\overline{\mathbb{C}} = \bigcup_{i \in I} U_i, U_i$ offen), dann existieren i_1, \dots, i_n mit $\overline{\mathbb{C}} = \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$

3 Die Riemannschen Flächen $\overline{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} und \mathfrak{h}

4. $\overline{\mathbb{C}}$ ist homöomorph zu $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ (via stereographischer Projektion (siehe Abbildung 3.1))

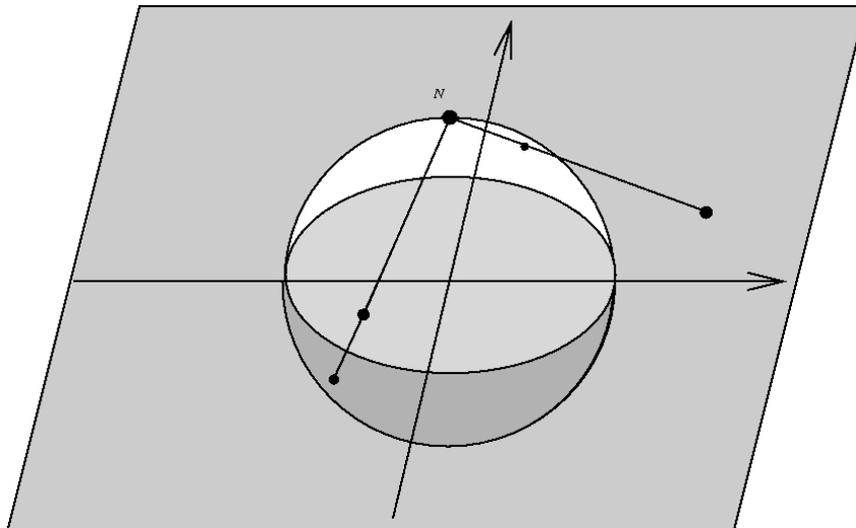


Abbildung 3.1: Die Stereographische Projektion vermittelt eine Isomorphie zwischen $\overline{\mathbb{C}}$ und S_2 .

5. $\overline{\mathbb{C}}$ ist homöomorph zu $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, der »projektiven Geraden über \mathbb{C} «.

Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} t_\infty &: \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, & z &\mapsto \frac{1}{z}, & \infty &\mapsto 0, & V_\infty &:= \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \\ t_0 &: \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C}, & z &\mapsto z, & & & V_0 &:= \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} = \mathbb{C} \end{aligned}$$

t_∞ und t_0 heißen **Karten** bei ∞ bzw. bei 0.

Bemerkung: t_∞, t_0 sind **Homöomorphismen** (d.h. bijektive Abbildungen f , wobei f und f^{-1} stetig sind)

Definition 3.2. (Holomorphe Funktionen auf $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$) $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ ($U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$) heißt **holomorph**, falls $f \circ t^{-1} : t(U \cap V) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist für $t = t_\infty$ oder $t = t_0$ und $V = V_\infty$ bzw. $V = V_0$.

Äquivalent: Für jede Karte $t : V \longrightarrow \mathbb{C}$ existiert eine holomorphe Funktion $g : t(U \cap V) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f = g \circ t = g(t)$ (d.h. $f(z) = g(z) =$ holomorph, falls z aus der Umgebung eines Punktes von \mathbb{C} ist oder $f(z) = g(\frac{1}{z})$ mit holomorphem g , falls z in einer Umgebung von ∞ ist.)

Definition 3.3. (f meromorph auf $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, U offen) f heißt **meromorph** auf $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, U offen, falls es eine Menge von **isolierten Punkten** P gibt, sodass

1. $f : U \setminus P \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist

3.2 Meromorphe Funktionen auf $\overline{\mathbb{C}}$

2. Für jede Karte $t : V \rightarrow \mathbb{C}$ ist $f = g(t)$ mit einer auf $t(V \cap U)$ meromorphen Funktion g mit Polen höchstens in $t(V \cap P)$

$\text{Mer}(U) :=$ Körper der auf U meromorphen Funktionen.

Bemerkung: $U \setminus P$ ist offen, da $P \subseteq U$ isoliert ist.

Beispiel: 3.2. Meromorphe Funktion f auf $\overline{\mathbb{C}}$ = eine auf \mathbb{C} meromorphe Funktion f , sodass ein $R > 0$ existiert, sodass f holomorph auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ und $f(1/\tilde{z})$ hat höchstens einen Pol bei $\tilde{z} = 0$.

Eine auf $\overline{\mathbb{C}}$ meromorphe Funktion hat höchstens endlich viele Pole.

3.2 Meromorphe Funktionen auf $\overline{\mathbb{C}}$

$\text{Mer}(\overline{\mathbb{C}})$ ist ein Körper, $f \in \text{Mer}(\overline{\mathbb{C}})$, $f \neq 0$ hat nur endlich viele Pole und Nullstellen.

Definition 3.4. Divisor einer meromorphen Funktion $f \in \text{Mer}(\overline{\mathbb{C}})$

$$\begin{aligned} \text{Mer}(\overline{\mathbb{C}}) \ni f &\rightsquigarrow D_f \\ D_f : \overline{\mathbb{C}} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ D_f(z) &= \text{ord}_z f \end{aligned}$$

($\text{ord}_\infty f = n$ gdw. $f(z) = g(\frac{1}{z})\frac{1}{z^n}$ mit einer bei $\tilde{z} = 0$ holomorphen Funktion $g(\tilde{z})$, $f = g(t_\infty)t_\infty^n$, g holomorph)

Beispiel: 3.3. $f(z) = \frac{z^3-1}{z^2+1}$ mit $\rho = e^{2\pi i/3}$:

z	$+i$	$-i$	1	ρ	ρ^2	∞	sonst
$D_f(z)$	-1	-1	1	1	1	-1	0

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^3 - 1}{\left(\frac{1}{z}\right)^2 + 1} = \frac{1 - z^3}{z + z^3} = \frac{1}{z} \cdot \underbrace{\frac{1 - z^3}{1 + z^2}}_{\text{holom. bei } 0}$$

Feststellung: $\sum_{z \in \overline{\mathbb{C}}} D_f(z) = 0$.

Satz 3.1. Für ein $f \in \text{Mer}(\overline{\mathbb{C}})$ gilt stets $\sum_{z \in \overline{\mathbb{C}}} D_f(z) = 0$.

Beweis. Wähle ein $R > 0$, sodass f holomorph in $|z| > R - \epsilon > 0$ mit $\epsilon > 0$ ist. Dann

3 Die Riemannschen Flächen $\overline{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} und \mathfrak{h}

gilt nach dem Satz von Rouché:

$$\begin{aligned}
 2\pi i \sum_{z \in \mathbb{C}} D_f(z) &= \oint_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\
 &= \oint_{z=\frac{1}{w}} \oint_{|w|=\frac{1}{R}} \frac{f'(\frac{1}{w})}{f(\frac{1}{w})} d\left(\frac{1}{w}\right) = - \oint_{|w|=\frac{1}{R}} \frac{f'(\frac{1}{w})}{f(\frac{1}{w})} \left(-\frac{1}{w^2}\right) dw \\
 &= - \int \oint_{|w|=\frac{1}{R}} \frac{g'(w)}{g(w)} dw \stackrel{\text{Rouché}}{=} -\text{ord}_0 g \cdot 2\pi i \\
 &= -2\pi i \cdot \text{ord}_\infty f = 2\pi i \sum_{z \in \mathbb{C}} D_f(z) \\
 &\Rightarrow \sum_{z \in \overline{\mathbb{C}}} D_f(z) = 0 \quad \square
 \end{aligned}$$

Lemma 3.1. $\text{Hol}(\overline{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}$, d.h. jede auf $\overline{\mathbb{C}}$ holomorphe Funktion ist konstant.

Beweis. $f \in \text{Hol}(\mathbb{C})$, da f stetig und $\overline{\mathbb{C}}$ kompakt ist, ist auch $f(\overline{\mathbb{C}})$ kompakt, d.h. $f(\overline{\mathbb{C}})$ ist beschränkt (d.h. $f(\overline{\mathbb{C}}) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ für ein $R > 0$). Also $f|_{\mathbb{C}}$ beschränkt, da $f|_{\mathbb{C}}$ holomorph ist, folgt mit dem Satz von Liouville: f ist konstant. \square

Definition 3.5. $\text{Div}(\overline{\mathbb{C}}) := \left\{ D : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{Z} \mid D(z) \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } z \in \overline{\mathbb{C}} \right\}$

$\text{Div}_0(\overline{\mathbb{C}}) := \left\{ D \in \text{Div}(\overline{\mathbb{C}}) \mid \sum_{z \in \overline{\mathbb{C}}} D(z) = 0 \right\}$

Bemerkung: $\text{Div}(\overline{\mathbb{C}})$ ist eine Gruppe, $\text{Div}_0(\overline{\mathbb{C}})$ ist eine Untergruppe.

Satz 3.2. Die Sequenz von Gruppenhomomorphismen

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{C}^\times \longrightarrow (\text{Mer}(\overline{\mathbb{C}}))^x \xrightarrow{f \mapsto D_f} \text{Div}_0(\overline{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathbf{0}$$

ist exakt.

Beweis. Exakt bei $*$: obiges Lemma, noch zu zeigen: $f \mapsto D_f$ ist surjektiv. Sei $D \in \text{Div}_0(\overline{\mathbb{C}})$, seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ die Stellen mit $D(\alpha_i) > 0$ und seien β_1, \dots, β_n die Stellen mit $D(\beta_j) < 0$, sei $s_i := D(\alpha_i)$ und $t_j := D(\beta_j)$. Beachte $D(\infty) = \sum_{j=1}^n t_j - \sum_{i=1}^m s_i$ (wegen $D \in \text{Div}_0(\overline{\mathbb{C}})$).

$$\text{Setze } f = \frac{\prod_1^m (z - \alpha_j)^{s_j}}{\prod_1^n (z - \beta_j)^{t_j}}, \quad f \in \text{Mer}(\overline{\mathbb{C}})$$

$$\text{Ferner: } D_f(\infty) = \sum t_j - \sum s_j, \quad \text{denn}$$

$$\text{bei } z = 0 : f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\prod_1^m \left(\frac{1}{z} - \alpha_j\right)^{s_j}}{\prod_1^n \left(\frac{1}{z} - \beta_j\right)^{t_j}} = z^{-\sum s_j + \sum t_j} \frac{\prod_1^m (1 - \alpha_j z)^{s_j}}{\prod_1^n (1 - \beta_j z)^{t_j}}$$

die rechte Seite ist holomorph bei $z = 0$ und hat dort den Wert 1. $\Rightarrow D(z) = D_f(z), z \in \mathbb{C}$ und auch $D(\infty) = D_f(\infty) \Rightarrow D = D_f$. \square

Korollar (zum Beweis): $\text{Mer}(\overline{\mathbb{C}}) = \text{Körper der rationalen Funktionen!}$

3.3 Automorphismen der komplexen Ebene

Vorbemerkungen:

$\mathfrak{h} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$, \mathbb{C} , $\overline{\mathbb{C}}$ sind einfach zusammenhängend.

Riemannscher Abbildungssatz: Jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ist isomorph zu \mathfrak{h} , \mathbb{C} oder $\overline{\mathbb{C}}$.

Satz: Zu jeder Riemannschen Fläche X existiert eine »holomorphe Überlagerung« $U \rightarrow X$, wobei $U = \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}$ oder \mathfrak{h} ist. Es gilt dann

$$U/\Gamma \approx X$$

für eine geeignete diskrete Untergruppe Γ von $\text{Aut}(U)$.

Definition 3.6. $\text{Aut}(\mathbb{C}) := \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ bijektiv, } f \text{ und } f^{-1} \text{ sind holomorph}\}$

Bemerkung:

1. $\text{Aut}(\mathbb{C})$ ist bzgl. \circ eine Gruppe.
2. Man kann zeigen: $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bijektiv und f holomorph $\Rightarrow f^{-1}$ holomorph.

Beispiel: 3.4. 1. $f(z) = az$, $a \neq 0$ $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ $a = re^{i\vartheta}$, $r > 0$: Drehung um ϑ , Streckung um r

2. $g(z) = z + b$, $b \in \mathbb{C}$: Translation um b

3. Allgemein sind Polynome ersten Grades $\in \text{Aut}(\mathbb{C})$ ($h(z) = az + b$).

Satz 3.3. $\text{Aut}(\mathbb{C})$ besteht aus allen Transformationen der Gestalt $z \mapsto az + b$ ($a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$)

Beweis. \supseteq Klar.

\subseteq Sei $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, betrachte f bei $z = \infty$, d.h. $f(\frac{1}{z})$ bei $z = 0$

Fall 1: f hat bei ∞ höchstens einen Pol: dann ist f aber eine rationale Funktion (da $\text{Mer}(\mathbb{C}) = \text{rationale Funktionen}$). Da f keine Pole in \mathbb{C} hat, d.h. f ist ganz rational. Also ist f ein Polynom. Da f injektiv, folgt $\deg(f) = 1$.

Fall 2: f hat eine wesentliche Singularität bei $z = \infty$ d.h. $f(\frac{1}{z})$ hat eine Singularität bei $z = 0$. f injektiv $\Rightarrow f(\{|z| < 1\}) \cap f(\{|z| > 1\}) = \emptyset$. Das steht im Widerspruch zum Satz von Weierstraß (siehe unten): nach Weierstraß existiert nämlich eine Folge (z_k) mit $|z_k| \rightarrow \infty$ und $f(z_k) \rightarrow f(0)$. Insbesondere gilt dann für $k \gg 0$, $|z_k| > 1$ $f(z_k) \in f(\{|z| < 1\})$ offene Umgebung von $f(0)$. \square

3 Die Riemannschen Flächen $\overline{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} und \mathfrak{h}

Satz 3.4. (von Weierstraß) Sei f eine ganze Funktion auf \mathbb{C} . Hat f bei ∞ eine wesentliche Singularität, dann gilt: zu jedem $w_0 \in \mathbb{C}$ existiert eine Folge (z_n) mit $|z_n| \rightarrow \infty$ und $f(z_n) \rightarrow w_0$.

Beweis. Widerspruchsannahme: Es gebe ein $w_0 \in \mathbb{C}$ und ein $\epsilon > 0$, sodass $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ gilt: $|f(z) - w_0| \geq \epsilon$. Zu zeigen: f ist ein Polynom.

Auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ hat f (als ganze Funktion) nur endlich viele Nullstellen z_1, \dots, z_m mit Ordnungen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Definiere nun

$$h = \frac{f(z) - w_0}{\prod_{j=1}^m (z - z_j)^{\alpha_j}}.$$

Dann hat h keine Nullstellen. Ferner gilt

$$|h(z)| = \frac{|f(z) - w_0|}{\prod |(z - z_j)|^{\alpha_j}} \geq \frac{\epsilon}{\prod |z - z_j|^{\alpha_j}} \quad \text{für } |z| > R.$$

Die Funktion $g := \frac{1}{h}$ ist ganz auf \mathbb{C} , da h keine Nullstellen hat und es gilt $|g(z)| \leq \frac{1}{\epsilon} \prod |z - z_j|^{\alpha_j}$ für $(|z| > R)$.

Dann existiert c_1, c_2 sodass $|g(z)| \leq c_1 + c_2 |z|^{\sum_{j=1}^m \alpha_j}$ für alle z . Nach dem verallg. Satz von Liouville (siehe unten) ist g ein Polynom vom Grad $\leq n$. Da g ferner keine Nullstellen hat, ist $g = c$ (c konstant), $h = \frac{1}{c}$ und $f = \frac{1}{c} \prod (z - z_j)^{\alpha_j} + w_0$. \square

Bemerkung: f bei ∞ keine wesentliche Singularität $\Leftrightarrow f$ ist Polynom.

Satz 3.5. (verallg. Satz von Liouville) Sei f ganz auf \mathbb{C} , es gebe c_1, c_2, n , sodass $|f(z)| \leq c_1 + c_2 |z|^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$.

Beweis. Wir zeigen $f^{(n+1)} \equiv 0$. Sei $z \in \mathbb{C}, r > 0$, dann ist

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(z) &= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \oint_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}} dw \\ &= \frac{(n+1)!}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{f(w)}{r^{n+2}} e^{-i\theta(n+2)} r e^{i\theta} d\theta \quad (w = z + ei\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi) \\ |f^{(n+1)}(z)| &\leq \frac{(n+1)!}{2\pi} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \underbrace{|f(w)|}_{\leq c_1 + c_2(|z|+r)^n} d\theta \\ &\leq (n+1)! \frac{(c_1 + c_2(|z|+r)^n)}{r^{n+1}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 3.6. (Kleiner Satz von Picard) Sei f ganze Funktion auf \mathbb{C} und f sei nicht konstant, dann hat die Menge $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$ höchstens ein Element. (Ohne Beweis)

3.4 Die Automorphismen von $\overline{\mathbb{C}}$

Definition 3.7. $f : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ($U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ offen) heißt **holomorph**, falls f stetig und für alle $a \in U$ gilt

1. ist $f(a) \in \mathbb{C}$ und ist $a \in V \subseteq U$ mit $f(V) \subseteq \mathbb{C}$, dann ist $f|_V$ holomorph
2. ist $f(a) = \infty$ und ist $a \in V \subseteq U$ mit $f(V) \subseteq \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, dann ist $\frac{1}{f|_V}$ holomorph
(der Nenner ist auf V niemals 0), es gilt die Konvention $\frac{1}{f(a)} = \frac{1}{\infty} := 0$

Äquivalent: Sind t_1, t_2 Karten auf $\overline{\mathbb{C}}$, so ist $t_1 \circ f \circ t_2^{-1}$ holomorph auf $V_2 \cap U \cap f^{-1}(V_1)$, wobei $t_i : V_i \rightarrow \mathbb{C}$.

Beispiel: 3.5. 1. Sei f meromorph auf $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ (U offen). Setze $\tilde{f}(a) = \infty$, falls a ein Pol von f ist und $\tilde{f}(a) = f(a)$ sonst. Dann ist $\tilde{f} : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ holomorph.

2. Sei $g : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ holomorph, dann ist $g|_{g^{-1}(\infty)}$ meromorph auf U .

Fazit: $\overline{\mathbb{C}}$ -wertig holomorph = \mathbb{C} -wertig meromorph.

Definition 3.8. $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) := \left\{ f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \mid f \text{ ist holomorph und } f^{-1} \text{ ist holomorph} \right\}$

Bemerkung: $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ ist eine Gruppe bzgl. \circ . Ein f mit f, f^{-1} holomorph heißt auch **biholomorph**.

Beispiel: 3.6. 1. Die Elemente von $\text{Aut}(\mathbb{C})$ lassen sich zu einem Element von $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ fortsetzen: ist $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, etwa $f(z) = az + b$, so setze fort auf $\overline{\mathbb{C}}$ via $f(\infty) = \infty$. Holomorphie bei ∞ : $\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{az+b}$ ist holomorph bei ∞ , d.h. zu zeigen: $\frac{1}{f(\frac{1}{z})} = \frac{1}{a\frac{1}{z}+b}$ ist holomorph bei $z = 0$: $\frac{1}{a\frac{1}{z}+b} = z(a - bz \pm \dots)$. Ok.

2. $S(z) = \frac{1}{z}$ ist auch in $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$.

3. Komposition von (1.), (2.): $z \mapsto \frac{1}{az+b}a' + b'$, $a, a' \neq 0$ ist in $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$, denn

$$\frac{1}{az+b}a' + b' = \frac{a' + b'(az+b)}{az+b} = \frac{a''z + b''}{c''z + d''}.$$

Definition 3.9. Für ein $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ setze $f_A := \frac{az+b}{cz+d}$.

Erinnerung: $\text{GL}(2, \mathbb{C}) := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid ad - bc \neq 0 \right\}$,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Beispiel: 3.7. $f_{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} = \frac{1}{z}$

3 Die Riemannschen Flächen $\overline{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} und \mathfrak{h}

Satz 3.7. Die Zuordnung $A \mapsto f_A$ definiert eine exakte Sequenz von Gruppen:

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathbf{1}$$

Das bedeutet $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ ist wohldefiniert und surjektiv und der Kern ist

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{C}^\times \right\} = \mathbb{C}^\times \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \mathbb{C}^\times.$$

Beweis. 1. Für $A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ ist dann $f_A \circ f_B = f_{AB}$. Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B =$

$$\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} f_A(f_B) &= \frac{a \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} = \frac{a(a'z+b') + b(c'z+d')}{c(a'z+b') + d(c'z+d')} \\ &= \frac{(aa' + bc')z + ab' + bd'}{(ca' + dc')z + cb' + dd'} \end{aligned}$$

2. $f_{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}(z) = z$

Nach (1.) und (2.) folgt: f_A ist bijektiv, denn $f_A \circ f_{A^{-1}} = f_{A^{-1}} \circ f_A = id$. f_A ist ($\overline{\mathbb{C}}$ -wertig) holomorph als rationale Funktion und $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$

Fazit: $f_A \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$.

3. Kern: sei $f_A = id$, $\forall z : \frac{az+b}{cz+d} = z \Leftrightarrow \forall z : az + b = z(cz + d)$, d.h. $c = 0, a = d, b = 0$, also $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

4. $A \mapsto f_A$ ist surjektiv: Jedenfalls ist $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})_\infty := \{f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \mid f(\infty) = \infty\}$ isomorph zu $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ vermöge $f \mapsto f|_{\mathbb{C}}$. $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ sind die Polynome vom Grad 1, d.h. $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})_\infty = \left\{ f_{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \mid \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \right\}$.

Sei $g \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$, sei $g(\infty) = a$. Ist $a = \infty$, so ist $g|_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ ein Polynom ersten Grades, die zugehörige Matrix ist $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Sei also $a \neq \infty$. Setze $f(z) := \frac{1}{z-a}, f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}), f(a) = \infty$. Daher $f \circ g \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}), f \circ g(\infty) = \infty, f \circ g \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})_\infty, g \in \underbrace{f^{-1} \circ \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})_\infty}_{\in \mathrm{Bild}(\mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))}$. \square

Bemerkung:

- $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})_\infty$ heißt **Standgruppe** oder **Stabilisator**.
- $z \mapsto \frac{1}{z}, z \mapsto az$ ($a \in \mathbb{C}^\times$), $z \mapsto z + b$ also zwei Spiegelungen bzw die Inversion, Drehstreckung und Translation erzeugen schon $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$.

- $f = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc \neq 0$ heißt **Möbius-Transformation**.

Satz 3.8. Sei $a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}$. Dann gibt es genau ein $f \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ mit $f(a) = 1$, $f(b) = 0$, $f(c) = \infty$.

Beweis. $f := [z, a, b, c] := \frac{z-b}{a-b} : \frac{z-c}{a-c} \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ (dabei bedeutet »:« eine Division.). (Da $a-b$ und $a-c$ Konstanten sind, ist $[z, a, b, c]$ bis auf diese Konstante $= \frac{z-b}{z-c} = f_A$, mit $A = \begin{bmatrix} 1 & -b \\ 1 & -c \end{bmatrix}$, $\det A = b - c \neq 0$) f erfüllt die Forderung $f(a) = 1$, $f(b) = 0$ und $f(c) = \infty$ (Nachrechnen!), $[z, a, b, c]$ heißt **Doppelverhältnis**.

Zur Eindeutigkeit: Ist $g \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ und $g : a, b, c \mapsto 1, 0, \infty$. Dann hat $h := g \circ f^{-1}$ drei Fixpunkte bei 1, 0 und ∞ . Wir zeigen: hat $h \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ mehr als 3 Fixpunkte, dann gilt $h = id$.

Sei $h \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$: dann $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $ad - bc \neq 0$ (nach Satz 3.7). Bestimmung der Fixpunkte:

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} = z &\Rightarrow az+b = z(cz+d) \\ cz^2 + (d-a)z - b &= 0 \end{aligned} \quad (*)$$

Hat h mehr als 3 Fixpunkte, alle $\neq \infty$, dann sind die Fixpunkte Lösungen von (*), also $c = 0, d = a, b = 0$, also $h = id$.

Ist ein Fixpunkt $= \infty$, dann ist $c = 0$ (und h Polynom vom Grad 1), hat h noch mehr als 2 Fixpunkte so sind diese Lösung von (*), also $d = a, b = 0$. \square

3.5 Die Automorphismen von \mathfrak{h}

Notation: Statt $f_A(z)$ schreibt man Az und meint $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$.

Zur Wiederholung: $\mathfrak{h} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$, $\text{Aut}(\mathfrak{h}) := \left\{ f : \mathfrak{h} \xrightarrow[\text{bijektiv}]{} \mathfrak{h} \mid f, f^{-1} \text{ holomorph} \right\}$.

Definition 3.10. Seien X, Y Riemannsche Flächen (z.B.: offene Teilmenge von $\overline{\mathbb{C}}$), dann heißen X und Y **biholomorph äquivalent**, falls ein $f : X \rightarrow Y$ existiert, sodass f bijektiv ist und f, f^{-1} holomorph sind.

Bemerkung: $\text{Aut}(X) = f^{-1} \circ \text{Aut}(Y) \circ f$

Satz 3.9. \mathfrak{h} ist biholomorph äquivalent zu $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

3 Die Riemannschen Flächen $\overline{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} und \mathfrak{h}

Beweis. Betrachte die Abbildung $f : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{D}$, $f(z) := \frac{z-i}{z+i}$.

$$\begin{aligned} |f(z)| < 1 &\iff |z+i|^2 > |z-i|^2 \\ &\iff x^2 + (y+1)^2 = x^2 + y^2 + 2y + y^2 > x^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 - 2y + y^2 \\ &\iff 2y > -2y \iff y > 0 \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung:

1. Die Umkehrabbildung zu f ist $f^{-1} = f \circ \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}^{-1} = f \circ \begin{bmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{i} \frac{w+1}{w-i} : \mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$$

2. Es gibt zu $f : \mathfrak{h} \xrightarrow{\text{biholomorph}} \mathbb{D}$ unendlich viele weitere: $\beta \circ f \circ \alpha$ mit $\alpha \in \text{Aut}(\mathfrak{h}), \beta \in \text{Aut}(\mathbb{D})$.

Beispiel: 3.8. Sei $A \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ (hier ist wirklich \mathbb{R} nicht \mathbb{C} gemeint!):

$$\begin{aligned} \Im f_A(z) &= \Im \frac{az+b}{cz+d} = \Im \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{(ad-bc)}{|cz+d|^2} \Im z \end{aligned}$$

Also $f_A \in \text{Aut}(\mathfrak{h}) \iff A \in \text{GL}(2, \mathbb{R})^+$. Mit $\text{GL}(2, \mathbb{R})^+ := \{A \in \text{GL}(2, \mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$.

Satz 3.10. Die Zuordnung $A \mapsto f_A$ definiert eine exakte Sequenz von Gruppenhomomorphismen

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{R}^\times \xrightarrow{a \mapsto \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}} \text{GL}(2, \mathbb{R})^+ \xrightarrow{A \mapsto f_A} \text{Aut}(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathbf{1}.$$

Alternative Formulierung: Die Zuordnung $A \mapsto f_A$ definiert eine exakte Sequenz von Gruppenhomomorphismen

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{R}^\times \xrightarrow{a \mapsto \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}} \text{SL}(2, \mathbb{R}) \xrightarrow{A \mapsto f_A} \text{Aut}(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathbf{1},$$

denn $f_A = f_{\frac{1}{\det A}A}$, und $\frac{1}{\det A}A$ hat Determinante 1, ist also aus $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ ist.

Beweis. (der ersten Formulierung) Sei $g \in \text{Aut}(\mathfrak{h})$, z.z. $g = f_A$ mit einem $A \in \text{GL}(2, \mathbb{R})^+$. Betrachte $w := g(i) = u + iv$. Betrachte $A = \begin{bmatrix} \sqrt{v} & \frac{u}{\sqrt{v}} \\ 0 & \sqrt{v}^{-1} \end{bmatrix}$, $A \in$

$$\text{SL}(2, \mathbb{R}), A \cdot i = \frac{\sqrt{i + \frac{u}{\sqrt{v}}}}{\sqrt{v}^{-1}} = \sqrt{v}i + u + iv = w.$$

Also $f_{A^{-1}} \circ g \in \text{Aut}(\mathfrak{h})$, wir zeigen

$$\text{Aut}(\mathfrak{h})_i = \{f_A \mid A \in \text{SO}(2, \mathbb{R})\}.$$

(Zur Wiederholung: $SO(2\mathbb{R}) =$

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \mid 0 \leq \theta < 2\pi \right\} =$$

Matrix der \mathbb{R} -linearen Abbildungen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto ze^{i\theta}$ bzgl. der \mathbb{R} -Basis $\{1, i\}$.)

Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}, f_A : \mathbb{D} \xrightarrow{\approx} \mathfrak{h}, f_A^{-1} \circ \text{Aut}(\mathfrak{h})_i \circ f_A = \text{Aut}(\mathbb{D})_0$.

Es gilt für $M \in GL(2, \mathbb{R})^+ : M \in SO(2\mathbb{R}) \iff A^{-1}MA = c \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$ mit $c \in \mathbb{R}^\times$ und $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1$.

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) :$$

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} a-ib & 0 \\ 0 & a+ib \end{bmatrix}$$

denn $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-ib \\ b+ia \end{pmatrix} = (a-ib) \underset{\substack{\text{Skalar-} \\ \text{Multipl.}}}{\cdot} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

(Eigenwertgleichung).

Die andere Richtung folgt durch Nachrechnen!

Also zu zeigen: $\underline{\text{Aut}(\mathbb{D})_0} = \left\{ f_N \mid N = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \right\} = \underline{\{g \mid \exists s \in S^1 : g(z) = sz\}}$ (Dabei ist $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$).

Das Unterstrichene folgt aber aus dem nächsten Lemma. □

Lemma 3.2. *Ist $h \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, dann $|h(z)| \leq |z|$, d.h. für $|h^{-1}(w)| \leq |w|$, d.h. mit $w = h(z) : |z| \leq |h(z)|$*

Satz 3.11. (Lemma von Schwarz) *Sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $f(0) = 0, |f(z)| < 1$ für $|z| < 1$, dann gilt:*

1. $|f(z)| \leq |z| \forall |z| \leq 1$
2. *Ist $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \neq 0$, dann ist $f(z) = \lambda z$ mit geeignetem $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$*

Beweis. Setze $g(z) := \frac{f(z)}{z}$ da $f(z) = 0$, folgt g holomorph in \mathbb{D} . Ferner $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ für $|z| = r < 1$, da $|f(z)| \leq 1$. Nach dem Maximumsprinzip folgt sogar $|g(z)| \leq \frac{1}{r} \forall z \leq r$.

Für $r \rightarrow 1$ folgt: $|g(z)| < 1$, d.h. $|f(z)| \leq |z|$ für $z \in \mathbb{D}$. Gilt $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein z_0 , dann $|g(z_0)| = 1$, also hat $|g|$ ein Maximum in \mathbb{D} , also ist $g = \text{const}$, etwa $g = \lambda$ mit $|\lambda| = 1$. □

3 Die Riemannschen Flächen $\overline{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} und \mathfrak{h}

Bemerkung: U.a. haben wir gezeigt:

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{h}, A \longmapsto A_i$$

ist bijektiv. $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ist eine Lie-gruppe, $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ ist eine kompakte maximale Untergruppe.

3.6 Ergänzungen

Später werden wir zu $X = \mathbb{C}$ oder \mathfrak{h} die Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{Aut}(X)$ betrachten. Auf X werden wir $f : X \xrightarrow{\text{meromorph}} \mathbb{C}$ mit $f(z + \lambda) = f(z) \forall \lambda \in \Gamma$ betrachten.

Beispiel: 3.9. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, f(z) = e^{2\pi z}, f(z+n) = f(z)$. Hier ist $\Gamma = \{t_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ und $t_n(z) = z + n$.

Solch ein f »induziert« eine Funktion $\underline{f} : \Gamma \backslash X \longrightarrow \mathbb{C}$.

Definition 3.11. $\Gamma \backslash X :=$ Menge alle Bahnen (Orbits) von X bzgl. Γ . Sprechweise: X mod Γ

Orbit := Menge der Gestalt: $\Gamma z := \{\gamma(z) \mid \gamma \in \Gamma\}$.

Bemerkung: X ist disjunkte Vereinigung seiner Orbits unter Γ (d.h.

- je 2 Orbits sind disjunkt oder gleich
- jeder Punkt gehört zu einem Orbit)

$$\underline{f}(\Gamma z) := f(z)$$

Ist Γ diskret, so kann man $\Gamma \backslash X$ mit der Struktur einer Riemannschen Fläche versehen.

Beispiel: 3.10. 1. $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ (d.h. $\Im \frac{\omega_1}{\omega_2} \neq 0$)
Gitter

$$\Gamma := \{t_l \mid l \in L\}, \quad t_l = z + l, \quad \Gamma \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$$

$$\Gamma \backslash \mathbb{C} = \mathbb{C}/L \text{ (Menge der } L\text{-Nebenklassen im Sinne der Gruppentheorie)}$$

$$(\Gamma z = \{t_l(z) \mid l \in L\} = \{z + l \mid l \in L\})$$

Fundamentalmasche in $L =$ Fundamentalbereich zu $\Gamma := F := \{x\omega_1 + y\omega_2 \mid 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$
 (siehe Abb. 3.2) **Bemerkung:** F hängt von ω_1, ω_2 ab. Eigenschaften:

- a) zu jedem $z \in \mathbb{C}$ ex. ein $l \in L$ mit $z + l \in F$
- b) Sind $z_1, z_2 \in F$ und gilt $z_1 = z_2 + l$ für ein $l \in \Gamma$, so gilt: $z_1 = z_2$ und damit $l = 0$

Fazit: $F \longrightarrow \Gamma \backslash \mathbb{C} = \mathbb{C}/L, z \mapsto \Gamma z$ ist bijektiv.

2. $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}), \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm \mathbf{1}\} \approx \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}), \pm A \longmapsto (z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}),$
Unterg.

wobei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ist.

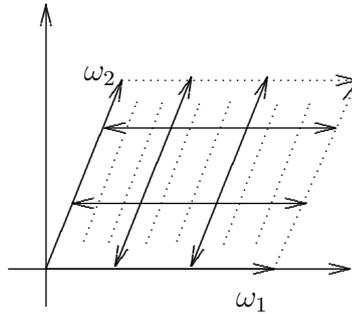


Abbildung 3.2: Die Fundamentalmasche ist das gepunktete Parallelogramm ohne die rechte und obere Seite, Punkte auf der oberen und rechten Seite werden mit gegenüberliegenden Punkten auf der unteren und linken Seite identifiziert (\rightsquigarrow Torus).

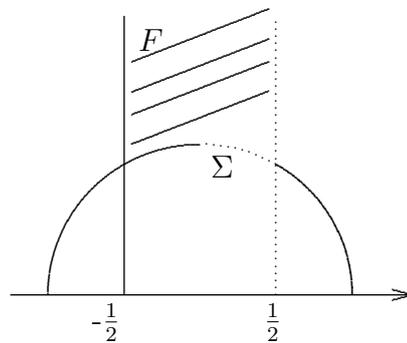


Abbildung 3.3: Das Moduldreieck F ist der Streifen $-\frac{1}{2} \leq \Re z < \frac{1}{2}$, der oberhalb des Kreises liegt. Der gestrichelte Bereich Σ auf dem Kreis gehört nicht zu F .

$$\Gamma \backslash \mathfrak{h} = \{ \Gamma z \mid z \in \mathfrak{h} \}, \quad \Gamma z = \{ Az \mid A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \}$$

Definition 3.12. *Fundamentalbereich von \mathfrak{h} modulo Γ := Moduldreieck* := $\{ z \in \mathfrak{h} \mid -\frac{1}{2} \leq \Re z < \frac{1}{2}, |z| > 1, |z| = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}(z) \}$ =: F (siehe Abb. 3.3)

Eigenschaften:

- a) $z \in \mathfrak{h}$, so ex. ein $A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$, sodass $Az \in F$
- b) Sind $z_1, z_2 \in F$, ist $A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$, mit $Az_1 = z_2$, so ist $z_1 = z_2$

Fazit: $F \rightarrow \Gamma \backslash \mathfrak{h}$ ist bijektiv.

Beweis. (zu 2a) $z \in \mathfrak{h}$, sei $A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$, sodass $\Im Az$ maximal ist (das geht, da

$$\left\{ \Im Az \stackrel{\text{Bsp 3.8}}{=} \frac{\Im z}{|cz + d|^2} \mid A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}), A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\}$$

3 Die Riemannschen Flächen $\overline{\mathbb{C}}$, \mathbb{C} und \mathfrak{h}

beschränkt ist)

Sei o.B.d.A. $-\frac{1}{2} \leq \Re Az < \frac{1}{2}$, sonst ersetze Az durch $(Az) + n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Az$ mit geeignetem $n \in \mathbb{Z}$. Es gilt dann $|Az| \geq 1$, sonst:

$$\Im(SAz) = \frac{\Im(Az)}{|Az|^2} > \Im Az, \quad \text{Widerspruch zur Maximalität von } \Im Az$$

$$\text{wobei } S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Sw = -\frac{1}{w}$$

Also $Az \in F$ oder $Az \in \Sigma$, im zweiten Fall ist $SA \in F$. □

4 Der Satz von Mittag-Leffler

4.1 Vorbemerkung: Die Mittag-Leffler-Teilbruchzerlegung für rationale Funktionen

$f \in \text{Mer}(\overline{\mathbb{C}})$, die Pole in \mathbb{C} seien z_1, \dots, z_p , der Hauptteil in z_j sei $h_j(z) = \frac{a_{-1}^{(j)}}{z-z_j} + \dots + \frac{a_{-n_j}^{(j)}}{(z-z_j)^{n_j}}$, $n_j = \text{ord}_{z_j} f$.

$g := f - (h_1 + \dots + h_p)$ ist holomorph in \mathbb{C} , und g ist bei ∞ entweder holomorph oder hat einen Pol, also ist g ein Polynom. Fazit: $f = g + h_1 + \dots + h_p$ ist die »Partialbruchzerlegung von f «.

Bemerkung:

1. $g(z) - g(0) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$, $a_j \in \mathbb{C}$ ist der Hauptteil von f bei ∞
2. ist f holomorph bei ∞ , so ist $g = \text{const}$
3. ist $f = \frac{h_1}{h_2}$, wobei h_1, h_2 Polynome sind, so ist $\text{ord}_{\infty} f = \deg h_2 - \deg h_1$
4. $f = \frac{h_1}{h_2}$, so $h_1 = qh_2 + r$ mit Polynomen q, r , wobei $\deg r < \deg h_2$ (Euklidische Division), damit ist $f = q + \frac{r}{h_2}$, $\frac{r}{h_2}$ hat Nullstelle bei ∞ , also $\frac{r}{h_2} = \text{»Summe der Hauptteile bei den Polen in } \mathbb{C}\text{«}$.

Gibt man Pole z_1, \dots, z_p und Hauptteile h_1, \dots, h_p zu den z_j vor, so gibt es stets ein $f \in \text{Mer}(\overline{\mathbb{C}})$ mit genau diesen Hauptteilen.

4.2 Die Mittag-Leffler-Teilbruchzerlegung für meromorphe Funktionen auf \mathbb{C}

Satz 4.1. (Mittag-Leffler) Sei z_1, z_2, \dots eine Folge von komplexen Zahlen mit $|z_j| \rightarrow \infty$, sei $h_j(z) = \frac{a_{-1}^{(j)}}{z-z_j} + \dots + \frac{a_{-n_j}^{(j)}}{(z-z_j)^{n_j}}$, $a_i^{(j)} \in \mathbb{C}$. Dann gibt es eine auf \mathbb{C} meromorphe Funktion f deren Polstellen genau die z_1, z_2, \dots sind und deren Hauptteile in z_j gerade die h_j sind. Ist \tilde{f} eine weitere meromorphe Funktion auf \mathbb{C} mit den gleichen Polen und Hauptteilen, so ist $f - \tilde{f}$ eine ganze Funktion.

Beweis. Seien o.B.d.A alle $z_j \neq 0$. Betrachte die Taylorentwicklung von $h_j(z)$ bei $z = 0$: $h_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(j)} z^k$ (konvergent für $|z| < |z_j|$).

4 Der Satz von Mittag-Leffler

Bestimme Zahlen k_j , so dass mit $g_j(z) = \sum_{k=0}^{k_j} b^{(j)} z^k$ gilt:

$$\forall R > 0 : \sum_{j=1}^{\infty} \max_{|z| \leq R} |h_j(z) - g_j(z)| < \infty.$$

Dann gilt: $f(z) := \sum_{j=1}^{\infty} (h_j(z) - g_j(z))$ konvergiert absolut gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$ und f ist wie im Satz verlangt.

Zur Bestimmung der k_j : wähle k_j sodass $\max |h_j(z) - g_j(z)| < \frac{1}{2^j}$ für $|z| \leq \frac{1}{2} |z_j|$, das geht, da $\sum b_k^{(j)} z^k$ absolut gleichmäßig konvergent auf $|z| \leq \frac{1}{2} |z_j|$.

Ist $R > 0$ gegeben, dann ist

$$\sum_{\substack{j \\ \frac{1}{2}|z_j| > R}} \max_{|z| \leq R} |h_j(z) - g_j(z)| \leq \sum_{\substack{j \\ \frac{1}{2}|z_j| > R}} \frac{1}{2^j}$$

(man hat nur endlich viele j ausgelassen: $\#\{z_j \mid |z_j| > 2R\} < \infty$). □

4.3 Beispiele zum Satz von Mittag Leffler

4.3.1 Der Cotangens

$$\pi \cot(\pi z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \frac{d}{dz} \log \sin(\pi z)$$

Pole: $\nu \in \mathbb{Z}$, Hauptteile: $\frac{1}{z-\nu}$. Sei $\nu \neq 0$, dann ist die Taylorentwicklung durch $\frac{1}{z-\nu} = -\frac{1}{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{z}{\nu})^k$ gegeben.

Wahl von P_j : $P_j = 0$, damit ist $g_j(z) = -\frac{1}{\nu}$ für $|z| < |\nu|$. $|\frac{1}{z-\nu} - \frac{1}{\nu}| \leq \frac{|z|}{|\nu|(|\nu|-|z|)}$.

Für $R > 0$:

$$\sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z} \\ |\nu| > R}} \max_{|z| \leq R} \left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu} \right) \leq \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z} \\ |\nu| > R}} \underbrace{\frac{R}{|\nu|(|\nu|-R)}}_{< \text{const.} \cdot \frac{1}{|\nu|^2}} < \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z} \\ \nu \neq 0}} \frac{1}{|\nu|^2} < \infty$$

Also $\frac{1}{z} + \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z} \\ \nu \neq 0}} \frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu}$ hat die gleichen Pole und Hauptteile wie $\pi \cot(\pi z)$.

Satz 4.2.

$$\begin{aligned} \pi \cot(\pi z) &= \frac{1}{z} + \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z} \\ \nu \neq 0}} \frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{z+\nu} - \frac{1}{\nu} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \nu^2} \end{aligned}$$

(Beweis: Übung)

Setze $g(z) := z \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right)$, dann folgt mit obigem Satz:

$$\begin{aligned} \frac{g'}{g}(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \nu^2} \stackrel{\text{Satz}}{=} \pi \cot(\pi z) \\ &= \frac{d}{dz} \frac{\sin(\pi z)}{\sin(\pi z)} \\ &\Rightarrow g(z) = \text{const} \cdot \sin(\pi z) \end{aligned}$$

Taylorentwicklung bei $z = 0 \Rightarrow \text{const} = \frac{1}{\pi}$.

4.3.2 Die Weierstraßsche \wp -Funktion

Fixiere ein $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, ($\Im \frac{\omega_1}{\omega_2} \neq 0$).

Gesucht ist eine meromorphe Funktion auf \mathbb{C} mit Polen $\gamma \in \Gamma, \gamma \neq 0$ und Hauptteilen $HT_\gamma(z) = \frac{1}{(z-\gamma)^2}$. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-\gamma)^2} &= \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{z}{\gamma}\right)\right)^2} \stackrel{\text{binom. Reihe}}{=} \frac{1}{\gamma^2} \left(1 + 2\frac{z}{\gamma} + 3\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 + \dots\right) \\ P_j = 0 : \left| \frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right| &= \frac{|2z\gamma - z^2|}{|\gamma^2(z-\gamma)^2|} \stackrel{\substack{|z| < R \\ |\gamma| > 2R}}{\leq} \frac{R(2|\gamma| + R)}{|\gamma|^2 |\gamma - R|^2} \\ &\leq \frac{3R|\gamma|}{|\gamma|^2 \left(\frac{1}{2}|\gamma|\right)^2} = \frac{12R}{|\gamma|^3}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ |\gamma| > 2R}} \max_{|z| \leq R} \left| \frac{1}{|z-\gamma|^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right| \leq \sum_{\gamma \neq 0} \frac{12R}{|\gamma|^3} \stackrel{\text{Lemma 1.1}}{<} \infty.$$

Satz 4.3. Durch $\wp(z; \Gamma) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq 0}} \left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right)$ wird eine auf \mathbb{C} meromorphe Funktion erklärt. Die Reihe ist absolut gleichmäßig konvergent auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Die Pole von \wp sind gerade die Punkte in Γ , Hauptteil bei $\gamma \in \Gamma$ ist $\frac{1}{(z-\gamma)^2}$.

Satz 4.4. $-\frac{d^2}{dz^2} (\log \sigma(z; \Gamma)) = \wp(z; \Gamma)$

4 Der Satz von Mittag-Leffler

Beweis.

$$\begin{aligned}\sigma(z) &= z \prod_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{\gamma}\right) e^{\frac{z}{\gamma} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2} \\ \frac{\sigma'}{\sigma}(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq 0}} \left(\frac{1}{z-\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \frac{z}{\gamma^2}\right) \\ \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)'(z) &= -\frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq 0}} \left(-\frac{1}{(z-\gamma)^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) = -\wp(z) \quad \square\end{aligned}$$

Satz 4.5. Für ein $\gamma \in \Gamma$ gilt $\wp(z + \gamma; \Gamma) = \wp(z; \Gamma)$.

Beweis.

$$\begin{aligned}\wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} + \sum_{\substack{\epsilon \neq 0 \\ \epsilon \in \Gamma}} \frac{2}{(z-\epsilon)^3} = -2 \sum_{\epsilon \in \Gamma} \frac{1}{(z-\epsilon)^3} \\ \wp'(z + \gamma) &= -\frac{2}{z^3} + \sum_{\substack{\epsilon \neq 0 \\ \epsilon \in \Gamma}} \frac{2}{(z-\epsilon+\gamma)^3} = -2 \sum_{\epsilon \in \Gamma} \frac{1}{(z-(\epsilon+\gamma))^3}\end{aligned}$$

denn mit ϵ durchläuft auch $\epsilon - \gamma$ das Gitter Γ . Damit ist $\wp(z + \gamma) = \wp(z) + c(\gamma)$ (*) (wobei $c(\gamma)$ eine Konstante ist, die von γ abhängt).

Zeige $c(\gamma) = 0$: Offensichtlich ist $\wp(-z) = \wp(z)$ (\wp ist eine gerade Funktion). Wähle in (*) $z = -\frac{\gamma}{2}$: $\wp(\frac{\gamma}{2}) = \wp(-\frac{\gamma}{2}) + c(\gamma) \Rightarrow c(\gamma) = 0$. \square

5 Elliptische Funktionen

Für das gesamte Kapitel sei:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2, \Im \frac{\omega_1}{\omega_2} \neq 0 \\ F &:= \left\{ x\omega_1 + y\omega_2 \mid 0 \leq x, y < 1 \right\} \\ F &\xrightarrow{\cong} \mathbb{C}/\Gamma \quad \text{vermöge } z \mapsto z + \Gamma\end{aligned}$$

Definition 5.1.

$$Ell(\Gamma) := \left\{ f \in \text{Mer}(\mathbb{C}) \mid \forall \gamma \in \Gamma : f(z + \gamma) = f(z) \right\}$$

heißt **Körper der elliptischen Funktionen** zu Γ .

Konvention: Ist z_0 Pol von f , dann setze $f(z_0) = \infty \in \overline{\mathbb{C}}$.

Satz 5.1. $Ell(\Gamma)$ ist ein Körper.

5.1 Divisoren auf \mathbb{C}/Γ

Lemma 5.1. Sei $f \in Ell(\Gamma)$. Für $z_0 \in \mathbb{C}, \gamma \in \Gamma$ gilt: $\text{ord}_{z_0}(f) = \text{ord}_{z_0+\gamma}(f)$

Beweis. Es gibt eine offene Umgebung U von z_0 und eine auf U holomorphe Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$, so dass

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \quad \text{für } z \in U, z \neq z_0 \text{ und } n = \text{ord}_{z_0} f \quad (*)$$

Dann gilt aber für $z \in \gamma + U$ ($\gamma + U$ ist offene Umgebung von $z_0 + \gamma$): $f(z) = f(z - \gamma) \stackrel{(*)}{=} (z - (z_0 + \gamma))^n g(z - \gamma)$. Es ist $\tilde{g} : z \mapsto g(z - \gamma)$ holomorph auf $\gamma + U$, $\tilde{g}(z_0 + \gamma) = g(z_0) \neq 0$. Es folgt: $n = \text{ord}_{z_0+\gamma} f$ \square

Definition 5.2. Ist $f \in Ell(\Gamma)$, so definiere

$$\begin{aligned}D_f &: \mathbb{C}/\Gamma \longrightarrow \mathbb{Z} \\ D_f(p) &:= \text{ord}_{z_0}(f) \\ p &= z_0 + \Gamma\end{aligned}$$

D_f heißt **Divisor** von f . D_f ist nach dem Lemma wohldefiniert.

5 Elliptische Funktionen

Lemma 5.2. $D_f(p) = 0$ für alle $p \in \mathbb{C}/\Gamma$ bis auf endlich viele Ausnahmen.

Beweis. F sei eine Fundamentalmasche für Γ (also $F \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma, z \mapsto z + \Gamma$ ist bijektiv)

$$\# \{p \mid D_f(p) \neq 0\} = \# \{z_0 \in F \mid \text{ord}_{z_0} f \neq 0\}$$

Zu $z_0 \in \bar{F}$ existiert eine offene Umgebung U_{z_0} von z_0 , so dass f auf $U_{z_0} \setminus \{z_0\}$ keine Null- oder Polstellen hat. Da \bar{F} kompakt ist, gibt es $z_1, \dots, z_t \in \bar{F}$, so dass $\bar{F} = \bigcup_{i=1}^t U_{z_i}$. Also ist $\{z_0 \in F \mid \text{ord}_{z_0} f \neq 0\} \subseteq \{z_1, \dots, z_t\}$. \square

Definition 5.3.

$$\text{Div}(\mathbb{C}/\Gamma) := \{D : \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{Z} \mid D(p) = 0 \text{ für fast alle } p \in \mathbb{C}/\Gamma\}$$

heißt **Divisoren auf \mathbb{C}/Γ** . $\text{Div}(\mathbb{C}/\Gamma)$ ist eine Gruppe bzgl der Addition: $(D_1 + D_2)(p) := D_1(p) + D_2(p)$

$$P(\mathbb{C}/\Gamma) := \{D \mid \exists f \in \text{Ell}(\Gamma) : D = D_f\}$$

heißt die Untergruppe der **Hauptdivisoren**. Dabei steht p für principle divisors.

Untergruppeneigenschaft: $D_{f_1} + D_{f_2} = D_{f_1 \cdot f_2}, D_{f^{-1}} = -D_f$

5.2 Drei der vier Liouilleschen Sätze

Satz 5.2 (erster Liouillescher Satz). Die einzig holomorphen Funktionen in $\text{Ell}(\Gamma)$ sind die Konstanten.

Beweis. Ist $f \in \text{Ell}(\Gamma)$ holomorph, dann ist $f(\mathbb{C}) = f(F) = f(\bar{F})$. f ist stetig und \bar{F} ist kompakt $\Rightarrow f(\bar{F})$ ist kompakt. Insbesondere ist $f(\mathbb{C})$ also beschränkt (Heine Borel). Nach Liouville aus Funktionentheorie I ist f konstant. \square

Korollar 5.1. Sind $f_1, f_2 \in \text{Ell}(\Gamma)^*$, $D_{f_1} = D_{f_2}$, dann ist $f_1 = \text{const} \cdot f_2$

Beweis. $D_{f_1} = D_{f_2} \Rightarrow D_{f_1/f_2} = 0$, also $\frac{f_1}{f_2}$ holomorph, also = const. \square

Satz 5.3 (zweiter Liouillescher Satz). Sei $f \in \text{Ell}(\Gamma)$, dann gilt

$$\sum_{z_0 \in F} \text{Res}_{z_0} f = 0$$

(Alternative Formulierung: $\sum_{p \in \mathbb{C}/\Gamma} \text{Res}_p f = 0$, $\text{Res}_p f := \text{Res}_{z_0} f$, wobei $p = z_0 + \Gamma$)

Beweis.

$$2\pi i \sum_{z \in F} f = \oint_{\partial F} f(z) dz$$

Abbildung 5.1: ohne Pole auf dem Rand

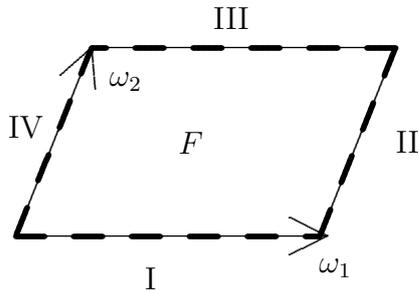
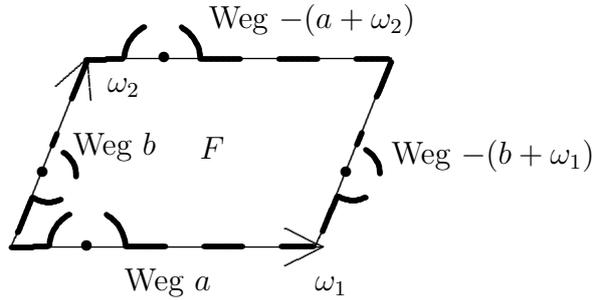


Abbildung 5.2: mit Polen auf dem Rand



Der Rand der Fundamentalmasche F wird auf den gestrichelten Wegen entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen.

f hat keine Pole in ∂F : (siehe auch Abb. 5.1) Dann lässt sich das Integral ohne Probleme berechnen:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial F} f(z) dz &= \int_0^1 f(z\omega_1)\omega_1 dt + \int_0^1 f(\omega_1 + t\omega_2)\omega_2 dt \\ &\quad + \int_0^1 f(\omega_1 + \omega_2 - t\omega_1)(-\omega_1) dt + \int_0^1 f(\omega_2 - t\omega_2)(-\omega_2) dt \end{aligned}$$

I: $t \rightarrow t\omega_1$ II: $t \rightarrow \omega_1 + t\omega_2$
III: $t \rightarrow \omega_1 + \omega_2 - t\omega_1$ IV: $t \rightarrow \omega_2 - t\omega_2$

Da $f \in \text{Ell}(\Gamma)$ (also mit $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0, 1\}$ gilt: $\forall z \in \partial F : f(\epsilon_1\omega_1 + \epsilon_2\omega_2 + z) = f(z)$), addieren sich das erste und dritte, sowie das zweite und vierte Integral zu 0. Es folgt

$$\oint_{\partial F} f(z) dz = 0$$

f hat Pole in ∂F : Dann $2\pi i \sum_{z \in F} \text{Res}_z f = \int_{\gamma} f(z) dz$, wobei γ der gestrichelte Weg aus Abbildung 5.2 ist.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a f(z) dz - \int_{a+\omega_2} f(z) dz - \int_{b+\omega_1} f(z) dz + \int_b f(z) dz$$

Wieder folgt wie oben, da $f \in \text{Ell}(\Gamma)$: das erste und zweite, sowie das dritte und vierte Integral addieren sich zu 0.

□

Korollar 5.2. Ein $f \in \text{Ell}(\Gamma)$ hat mindestens zwei Pole modulo Γ (d.h. in F) mit Vielfachheiten gezählt.

Folgerung: In einem gewissen Sinne ist die einfachste nichttriviale Funktion in $\text{Ell}(\Gamma)$ eine solche, die einen Pol zweiter Ordnung (\Rightarrow Residuum = 0) in $0 \in F$) hat.

5 Elliptische Funktionen

hat. Der Hauptteil in 0 ist dann $\frac{1}{z^2}$. Die Funktion $\wp(z)(:= \wp(z, \Gamma))$ ist eine solche Funktion.

Ist f eine weitere solche Funktion, so ist $f - \wp = \text{const}$ nach dem ersten Satz von Liouville.

Satz 5.4 (dritter Liouvillescher Satz). Ist $f \in \text{Ell}(\Gamma)$, dann ist

$$\sum_{p \in \mathbb{C}/\Gamma} D_f(p) = 0$$

Beweis. f hat keine Null- oder Polstellen auf ∂F : dann gilt mit dem Satz von Rouché:

$$2\pi i \sum_{z \in F} \text{ord}_f f = \oint_{\partial F} d \log f = \oint_{\partial F} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

Das folgt aber, wie im vorigen Beweis, unter Benutzung von $\frac{f'}{f} \in \text{Ell}(\Gamma)$.

f hat Null- oder Polstellen auf ∂F : analog wie im vorigen Beweis. \square

Fazit: Wir erhalten eine exakte Sequenz von Gruppen:

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \text{Ell}(\Gamma)^* \longrightarrow \text{Div}_0(\mathbb{C}/\Gamma)$$

Die Sequenz ist hinten **nicht** surjektiv: z.B:

$$D : \mathbb{C}/\Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}, D(p) := \begin{cases} -1 & p = 0 \\ +1 & p = \frac{1}{2}\omega_1 + \Gamma \end{cases}$$

Wäre $D = D_f$ so hätte f nur einen Pol im Widerspruch zum zweiten Satz von Liouville.

5.3 Thetafunktionen

Erinnerung: $(\log \sigma)'' = -\wp$. Also für $\gamma \in \Gamma$ gilt:

$$\frac{d^2}{dz^2} \log \sigma(z + \gamma) = \frac{d^2}{dz^2} \log \sigma(z)$$

daher (zweimal Stammfunktion suchen, dann exp anwenden)

$$\sigma(z + \gamma) = e^{A(\gamma)z + B(\gamma)} \sigma(z), \quad \forall z$$

mit geeigneten Konstanten $A = A(\gamma), B = B(\gamma)$.

Definition 5.4. Die Menge

$$\Theta(\Gamma) := \left\{ f \text{ meromorph auf } \mathbb{C}, f \not\equiv 0 \mid (\log f)'' = \left(\frac{f'}{f} \right)' \in \text{Ell}(\mathbb{C}/\Gamma) \right\}$$

heißt Menge der **Thetafunktionen mod Γ** . Die Menge

$$\Theta(\Gamma)_{\text{triv}} := \left\{ e^{p(z)} \mid p = \text{Polynom vom Grad } \leq 2 \right\}$$

sind die trivialen Thetafunktionen.

Bemerkung: $\Theta(\Gamma)_{\text{triv}} \subseteq \Theta(\Gamma)$, $\sigma \in \Theta(\Gamma)$, $\sigma(z + \gamma) = e^{A(\gamma)z + B(\gamma)}$.

Damit sind $\gamma \mapsto A(\gamma)$, $\gamma \mapsto B(\gamma)$ jeweils Abbildungen der Form $\Gamma \rightarrow \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$.

Bemerkung: Kozykelrelation:

$$\underbrace{\frac{\sigma(z + \gamma_1 + \gamma_2)}{\sigma(z + \gamma_1)}}_{\exp(A(\gamma_2)(z + \gamma_1) + B(\gamma_2))} \cdot \underbrace{\frac{\sigma(z + \gamma_1)}{\sigma(z)}}_{\exp(A(\gamma_1)z + B(\gamma_1))} = \underbrace{\frac{\sigma(z + \gamma_1 + \gamma_2)}{\sigma(z)}}_{\exp(A(\gamma_1 + \gamma_2)z + B(\gamma_1 + \gamma_2))}$$

Daraus folgt: $B(\gamma_1 + \gamma_2) = B(\gamma_1) + B(\gamma_2)$, d.h. $B : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ ist ein Gruppenhomomorphismus, $A(\gamma_2)\gamma_1 + A(\gamma_1) = A(\gamma_1 + \gamma_2)$, $A : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ ist ein **Kozykel**.

Satz 5.5. 1. $\Theta(\Gamma)$ ist eine Gruppe bzgl. Multiplikation von Funktionen.

2. Ist $f \in \Theta(\Gamma)$, dann ist $\text{ord}_z f = \text{ord}_{z+\gamma} f, \forall z \in \mathbb{C}, \gamma \in \Gamma$.

Beweis. 2. ist eine Übung und folgt durch Nachrechnen. Zu 1.:

$$(\log f_1 \cdot f_2)'' = \underbrace{(\log f_1)''}_{\in \text{Ell}(\Gamma)} + \underbrace{(\log f_2)''}_{\in \text{Ell}(\Gamma)} \in \text{Ell}(\Gamma) \quad \square$$

Definition 5.5. Sei $f \in \Theta(\Gamma)$, $D_f : \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$, $D_f(p) := \text{ord}_{z_0} f$, wobei $p = z_0 + \Gamma$.

Bemerkung:

- $D_f(p) = 0$ für fast alle $p \in \mathbb{C}/\Gamma$
- wohldef. nach Satz 5.5 (1.)
- $D_{f_1 \cdot f_2} = D_{f_1} + D_{f_2}$, d.h. $f \mapsto D_f$ ist Gruppenhomomorphismus $\Theta(\Gamma) \rightarrow \text{Div}(\mathbb{C}/\Gamma)$
- $f \in \Theta(\Gamma)_{\text{triv}} : D_f \equiv 0$

Satz 5.6. Die Sequenz von Gruppenhomomorphismen

$$\mathbf{1} \rightarrow \Theta(\Gamma)_{\text{triv}} \hookrightarrow \Theta(\Gamma) \rightarrow \text{Div}(\mathbb{C}/\Gamma) \rightarrow \mathbf{1}$$

ist exakt.

5 Elliptische Funktionen

Beweis. Definiere $D_\sigma := (0)$ d.h

$$D_\sigma(p) := \begin{cases} 1, & \text{falls } p = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und für $\sigma(* - z_0), z_0 \in \mathbb{C}$ fix:

$$D_{\sigma(*-z_0)}(p) := (z_0 + \Gamma) = \begin{cases} 1, & \text{falls } p = z_0 + \Gamma \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Surjektivität von $f \mapsto D_f$: Sei $D \in \text{Div}(\mathbb{C}/\Gamma)$, seien p_1, \dots, p_n die Punkte in \mathbb{C}/Γ , mit $\nu_j := D(p_j) \neq 0$. Sei $p_j = z_j + \Gamma$ mit geeigneten $z_j \in \Gamma$.

Setze $f(z) := \prod_{j=1}^n \sigma(z - z_j)^{\nu_j}$, dann

$$D_f = \sum_{j=1}^n D_{\sigma(*-z_j)^{\nu_j}} = \sum_{j=1}^n \nu_j D_{\sigma(*-z_j)} = \sum_{j=1}^n \nu_j (z_j + \Gamma) = D$$

Kern($f \mapsto D_f$): $\Theta(\Gamma) \subseteq \text{Kern}(f \mapsto D_f)$: ok. Sei $\theta \in \Theta(\Gamma)$, mit $D_\theta = 0$, dann $\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)' = (\log \theta)''$ ist holomorph, Also = const =: a (erster Satz von Liouville). Also $\frac{\theta'}{\theta} = az + b$, (b geeignet), $\theta = \exp\left(a\frac{z^2}{2} + bz + c\right)$, (c geeignet), d.h. θ ist trivial. \square

Korollar 5.3. $\sigma(z + \gamma) = \exp(Az + b)\sigma(z)$, mit $A = A(\gamma), B = B(\gamma), \gamma \in \Gamma$ fix.

Beweis.

$$\begin{aligned} f(z + \gamma) &= \prod_{j=1}^n \sigma(z + \gamma - z_j)^{\nu_j} = \prod_{j=1}^n \exp((A(z - z_j) + B)\nu_j) \sigma(z - z_j)^{\nu_j} \\ &= \exp\left((Az + B) \sum_{j=1}^n \nu_j - A \sum_{j=1}^n z_j \nu_j\right) \cdot f(z) \\ &= \exp\left((Az + B) \sum_{p \in \mathbb{C}/\Gamma} D(p) - A \sum_{j=1}^n z_j D(z_j + \Gamma)\right) \cdot f(z) \end{aligned}$$

Also $f(z + \gamma) = f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$, falls $\sum_{p \in \mathbb{C}/\Gamma} D(p) = 0$ und $\sum_{j=1}^n z_j D(z_j + \Gamma) = 0$. \square

Definition 5.6.

$$\tilde{P}(\mathbb{C}/\Gamma) := \left\{ D \in \text{Div}_0(\mathbb{C}/\Gamma) \mid \sum_{p \in \mathbb{C}/\Gamma} p D(p) = 0 \right\}$$

(dabei bedeutet " $=0$ " eine "Kongruenz $\equiv 0$ " in der Gruppe \mathbb{C}/Γ .)

Bemerkung: $\tilde{P}(\mathbb{C}/\Gamma) \subseteq \text{Div}_0(\mathbb{C}/\Gamma)$ ist Untergruppe.

Beispiel: 5.1. \wp' hat Pole (3. Ordnung) in Γ , $\wp'(z) = -\wp'(-z)$, \wp' ist ungerade (da \wp gerade ist) mit $\Gamma = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ folgt:

- $\wp'(\frac{-\omega_1}{2}) \stackrel{\text{ungerade}}{=} -\wp'(\frac{\omega_1}{2})$. Es gilt aber auch, wegen der Periodizität $\wp'(\frac{-\omega_1}{2}) = \wp'(\frac{-\omega_1}{2} + \omega_1) = \wp'(\frac{\omega_1}{2}) \Rightarrow \wp'(\frac{\omega_1}{2}) = 0$ und analog:
- $\wp'(\frac{\omega_2}{2}) = 0$
- $\wp'(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}) = 0$

$$D_{\wp'} = -3(0) + (\frac{\omega_1}{2} + \Gamma) + (\frac{\omega_2}{2} + \Gamma) + (\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \Gamma)$$

$\wp'(z) = 0 \iff 2z \in \Gamma \setminus \{0\}$, $\wp'(z) = 0$ in den Punkten aus $\mathbb{C}/\Gamma \setminus \{0\}$ der Ordnung 2, den **primitiven Zweiteilungspunkten** (siehe Abbildung 5.3). Nach dem vorigen Beweis gilt:

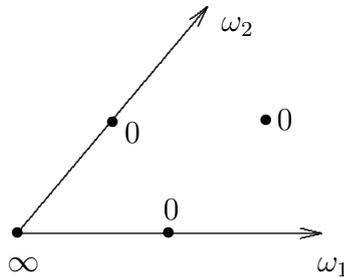


Abbildung 5.3: Die primitiven Zweiteilungspunkte sind die Punkte wo $\wp'(z) = 0$ ist.

$$\wp'(z) = C \cdot \frac{\sigma(z - \frac{\omega_1}{2})\sigma(z - \frac{\omega_2}{2})\sigma(z - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2})}{\sigma(z)^3}$$

Dabei ist C eine triviale Thetafunktion. Die rechte Seite ist sogar $\in \text{Ell}(\Gamma)$, also $C = \text{const}$ nach dem ersten Satz von Liouville.

5.4 Bestimmung der Hauptdivisoren

Satz 5.7 (vierter Liouvillescher Satz). Sei $f \in \text{Ell}(\Gamma)$, $f \neq 0$, dann gilt

$$\sum_{p \in \mathbb{C}/\Gamma} p D_f(p) = 0$$

Bemerkung: Es ist also $D_f \in \tilde{P}(\mathbb{C}/\Gamma)$.

Beweis. Fallunterscheidung:

f hat keine Pole oder Nullstellen auf ∂F :

$$\oint_{\partial F} \frac{f'}{f}(z) z dz \stackrel{\text{Residuensatz}}{=} 2\pi i \sum_{z \in F} \text{Res}_z \left(\frac{f'}{f}(z) z \right)$$

5 Elliptische Funktionen

Nebenrechnung: $f = (z - z_j)^n g(z)$, g holomorph nahe z_j , $g(z_j) \neq 0$, d.h. $n = \text{ord}_{z_j} f$.

$$\begin{aligned} \text{Sei } n \neq 0 \quad \frac{f'}{f}(z)z &= \underbrace{\frac{g'}{g}(z)z}_{\text{holomorph bei } z_j} + \frac{n}{z - z_j}z = \frac{g'}{g}(z)z + \frac{nz_j}{z - z_j} + n \\ &\Rightarrow \text{Res}_{z_j} \frac{f'}{f}(z)z = nz_j \end{aligned}$$

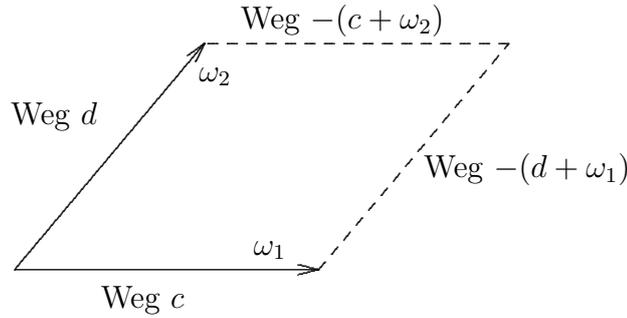


Abbildung 5.4: ∂F wird entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen.

Für die folgenden Integrale betrachte die Wege in Abbildung 5.4:

»Summe der Residuen« = $\sum_{z \in F} \text{ord}_z(f)z =: S$,

Nach der Nebenrechnung bleibt zu zeigen S liegt in Γ . Insgesamt also zu zeigen:

$$I := \oint_{\partial F} \frac{f'}{f}(z)z \, dz \in 2\pi i\Gamma$$

Man hat:

$$I = \left(\int_c \frac{f'}{f}(z)z \, dz - \int_{c+\omega_2} \frac{f'}{f}(z)z \, dz + \int_d \frac{f'}{f}(z)z \, dz - \int_{d+\omega_1} \frac{f'}{f}(z)z \, dz \right), \text{ dabei ist}$$

$$\int_{c+\omega_2} \frac{f'}{f}(z)z \, dz = \int_c \frac{f'}{f}(z + \omega_2)(z + \omega_2) \, dz, \text{ also}$$

$$\int_c \frac{f'}{f}(z)z \, dz - \int_{c+\omega_2} \frac{f'}{f}(z)z \, dz = -\omega_2 \int_c \frac{f'}{f}(z)z \, dz \quad (*) \quad \text{und analog}$$

$$\int_d \frac{f'}{f}(z)z \, dz - \int_{d+\omega_1} \frac{f'}{f}(z)z \, dz = -\omega_1 \int_d \frac{f'}{f}(z)z \, dz \quad (**)$$

$$(*) = -\omega_2 \int_{f \circ c} \frac{dw}{w} \quad (\text{Subst.: } w = f(z))$$

$$= -\omega_2 \cdot (\text{Umlaufzahl von } f \circ c \text{ um } 0) \in 2\pi i\mathbb{Z} \cdot \omega_2$$

$$(**) = -\omega_1 \int_{f \circ d} \frac{dw}{w} \quad (\text{Subst.: } w = f(z))$$

$$= -\omega_1 \cdot (\text{Umlaufzahl von } f \circ d \text{ um } 0) \in 2\pi i\mathbb{Z} \cdot \omega_1$$

$f \circ c$ ist ein geschlossener Weg in \mathbb{C}^* , da $f(0) = f(\omega_1)$, $f \circ d$ ist ein geschlossener Weg in \mathbb{C}^* , da $f(0) = f(\omega_2)$. Insgesamt folgt: $I \in 2\pi i\Gamma$.

f hat Pole oder Nullstellen auf ∂F : Man ändert den Beweis vom ersten Fall in der gleichen Weise ab, wie beim zweiten Fall des Beweises von Satz 5.3. \square

Satz 5.8 (Hauptsatz der Divisorthorie für elliptische Funktionen). *Die Sequenz von Gruppenhomomorphismen*

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{C}^* \xrightarrow{f} \text{Ell}(\Gamma)^* \xrightarrow{D_f} \tilde{P}(\mathbb{C}/\Gamma) \longrightarrow \mathbf{0}$$

ist exakt.

Beweis. Nach den vorigen Sätzen ist nur noch die Surjektivität zu zeigen: Ist $f \in \text{Ell}(\Gamma)^*$, sind die $z_j, 1 \leq j \leq t$ (die Repräsentanten der p_j mit $D_f(p_j) = 0$), so gewählt, dass

$$\sum D_f(z_j + \Gamma) \cdot z_j = 0, \tag{*}$$

dann gilt $f = \text{const} \cdot \prod_{j=1}^t \sigma(z - z_j)^{D_f(p_j)}$ (im Beweis über die Thetafunktion schon gezeigt: f ist elliptische Funktion, für ein D welches (*) erfüllt). \square

Notation: Ab jetzt $P(\mathbb{C}/\Gamma) := \tilde{P}(\mathbb{C}/\Gamma)$.

Beispiel: 5.2. $D = 3(0) + (\frac{\omega_1}{2} + \Gamma) + (\frac{\omega_2}{2} + \Gamma) + (\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \Gamma)$

$$\sum_{p \in \mathbb{C}/\Gamma} D(p)p = -3 \cdot 0 + \frac{\omega_1}{2} + \Gamma + \frac{\omega_2}{2} + \Gamma + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \Gamma = 0 \text{ in } \mathbb{C}/\Gamma$$

mit Repräsentanten in \mathbb{C} :

$$-3 \cdot \underset{\in \mathbb{C}}{0} + \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2} - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \Gamma = 0$$

Übung: Man kann stets $z_j \in p_j$ (Äquivalenzklasse) wählen, so dass $\sum_{j=1}^t D(p_j)z_j = 0$ (in \mathbb{C}).

Bemerkung: Für eine Gegenüberstellung von \mathbb{C}/Γ und $\overline{\mathbb{C}}$ siehe Tabelle 5.1.

Definition 5.7.

$$\text{Pic}_0(\mathbb{C}/\Gamma) := \text{Div}_0(\mathbb{C}/\Gamma)/P(\mathbb{C}/\Gamma)$$

heißt **Picard Gruppe** von \mathbb{C}/Γ .

Satz 5.9. Es ist $\text{Pic}_0(\mathbb{C}/\Gamma) \approx \mathbb{C}/\Gamma$.

5 Elliptische Funktionen

	\mathbb{C}/Γ	$\bar{\mathbb{C}}$
Hauptdivisoren P	$P(\mathbb{C}/\Gamma) \subsetneq Div_0(\bar{\mathbb{C}})$	$Div_0(\bar{\mathbb{C}})$
Greensche Funktion: $g(z)$	$\sigma(z)$	id
		$D \text{ gegeben } \rightsquigarrow$ $f := \prod g(z - z_j)^{D(p_j)}$

Tabelle 5.1: Gegenüberstellung von \mathbb{C}/Γ und $\bar{\mathbb{C}}$

Beweis. Die Abbildung $Div_0(\mathbb{C}/\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma, D \mapsto \sum_{p \in \mathbb{C}/\Gamma} D(p)p$ ist ein Gruppenhomomorphismus:

- surjektiv: $(p) - (0) \xrightarrow{p \in \mathbb{C}/\Gamma} p$
- Kern = $P(\mathbb{C}/\Gamma)$ (ersten Homomorphiesatz anwenden) □

Notation: Zu $p \in \mathbb{C}/\Gamma$ definiere: $(p) \in Div(\mathbb{C}/\Gamma)$ via:

$$(p)(q) = \begin{cases} 1 & p = q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist $D \in Div_0(\mathbb{C}/\Gamma)$, sind p_1, \dots, p_n die Punkte in \mathbb{C}/Γ mit $D(p_j) =: \nu_j \neq 0$, dann ist

$$D = \nu_1(p_1) + \dots + \nu_n(p_n).$$

5.5 Die algebraische Struktur von $Ell(\Gamma)$

Definition 5.8. Sei $f \in Ell(\Gamma), f \neq const$, dann heißt

$$e_{z_0} := \text{ord}_{z_0}(f - f(z_0))$$

der **Verzweigungsgrad** bei z_0 oder die **Vielfachheit** mit der $f(z_0)$ bei z_0 angenommen wird.

Bemerkung: Es gibt nur endlich viele $z_0 \in F$ mit $e_{z_0}(f) > 1$, (denn $e_{z_0}(f) > 1$, wenn $f'(z_0) = 0$, f' hat aber nur endlich viele Nullstellen als elliptische Funktion).

Satz 5.10. Sei $f \in Ell(\Gamma), f \neq const: \forall b \in \bar{\mathbb{C}}$ gilt: $\sum_{\substack{z \in F \\ f(z)=b}} e_z(f) = \sum_{\substack{z \in F \\ z \text{ Pol von } f}} \text{ord}_z f$

Beweis.

$$D_{f-b} = \sum_{\substack{z \in F \\ z \text{ Pol von } f}} \text{ord}_z f(z + \Gamma) + \sum_{\substack{z \in F \\ f(z)=b}} e_z(f)(z + \Gamma)$$

und $D_{f-b} \in Div_0(\mathbb{C}/\Gamma)$. □

Definition 5.9. *Es heißt*

$$\deg(f) := - \sum_{\substack{z \in F \\ z \text{ Pol von } f}} \text{ord}_z f$$

Grad von f .

Satz 5.11. *Seien $f, g \in Ell(\Gamma)$, $f, g \neq \text{const}$. Dann existiert ein Polynom $P(X) \in \mathbb{C}(g)[X]$ vom Grad $n := \deg(g)$, so dass $P(0) \equiv 0$ (Beweis später).*

Bemerkung: $\mathbb{C}(g)$ ist der kleinste Körper in $Ell(\Gamma) (\subseteq \text{Mer}(\mathbb{C}))$, der \mathbb{C} und g enthält
 $= \{R(g) \mid R \in \mathbb{C}(X)\}$.

Satz 5.12. *Für $g \in Ell(\Gamma)$, $g \neq \text{const}$, gilt $\mathbb{C}(g) \approx \mathbb{C}(X) =$ Körper der rationalen Funktionen in X .*

Beweis. Andernfalls gäbe es ein Polynom $P \in C[X]$ mit $P(g) = 0$ (andernfalls existiert: $\Phi : C[X] \rightarrow C(g), h \mapsto h(g)$, ist Φ injektiv, dann folgt der Satz). Also nimmt g nur endlich viele Werte an (Nullstellen von P): Widerspruch! \square

Satz 5.13. *$Ell(\Gamma)$ ist eine quadratische Körpererweiterung von $\mathbb{C}(\wp)$. Genauer: $Ell(\Gamma) = \mathbb{C}(\wp, \wp')$, der kleinste Körper in $\text{Mer}(\mathbb{C})$, der \wp, \wp' und \mathbb{C} enthält und es gilt*

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - 20a\wp - 28b, \quad (*)$$

wobei $a, b \in \mathbb{C}$, genauer: $\wp = \frac{1}{z^2} + az^2 + bz^4 + O(z^6)$.

Beweis. $\mathbb{C}(\wp, \wp')$ ist quadratische Erweiterung von $\mathbb{C}(\wp)$:

- $\mathbb{C}(\wp, \wp') \not\subseteq \mathbb{C}(\wp)$, denn \wp' ist ungerade und \wp ist gerade
- Es gilt die Differentialgleichung (*):

$$\begin{aligned} \wp &= \frac{1}{z^2} + az^2 + bz^4 + \dots \quad (\wp \text{ ist holomorph bei } 0 \text{ mit} \\ \text{Wert: } \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma \neq 0}} \frac{1}{z - \gamma} - \frac{1}{z^2} \Big|_{z=0} &= 0 \quad , \wp \text{ ist gerade)} \\ \wp' &= -\frac{2}{z^3} + 2az + 4bz^3 + \dots \\ \wp'^2 &= \frac{4}{z^6} - \frac{8a}{z^2} - 16b + O(z^2) \end{aligned}$$

Summanden von (*):

$$\begin{aligned} 4\wp^3 &= \frac{4}{z^6} + \frac{12a}{z^2} + 12b + O(z^2) \\ -20a\wp &= -20\frac{a}{z^2} + O(z^2) \\ -28b &= -28b + O(z^2) \end{aligned}$$

5 Elliptische Funktionen

$\Rightarrow \wp'^2 - (4\wp^3 - 20a\wp - 28b) = O(z^2)$. Das ist aber $\in Ell(\Gamma)$, ferner holomorph bei 0, also auch in Γ , nach Liouville I konstant und nach der Laurententwicklung $= 0$.

Klar ist: $\mathbb{C}(\wp, \wp') \subseteq Ell(\Gamma)$. Umgekehrt: Sei $f \in Ell(\Gamma)$, $f \neq const$, wäre $f \notin \mathbb{C}(\wp, \wp')$, so hätte man folgenden Turm von Körpererweiterungen:

$$\text{Körper: } \mathbb{C}(\wp) \subsetneq \mathbb{C}(\wp, \wp') \subsetneq_{d>1} \mathbb{C}(\wp, \wp', f)$$

Grad: $\frac{2}{2} \quad \frac{d}{d>1}$

d ist endlich nach dem Satz 5.11, also wäre

$$\mathbb{C}(\wp) \subsetneq_{2d>2} \mathbb{C}(\wp, \wp', f)$$

Es gibt aber ein \tilde{f} mit $\mathbb{C}(\wp, \wp', f) = \mathbb{C}(\wp)(\tilde{f})$ (Satz vom primitiven Element), also hat \tilde{f} den Grad $2d > 2$ über $\mathbb{C}(\wp)$ im Widerspruch zu Satz 5.11. \square

Beweis. (von 5.11) Es sei $w \in \overline{\mathbb{C}}$,

$$w \mapsto Q_w := \prod_{\substack{z \in \mathbb{C} \\ g(z)=w}} (X - f(z))^{e_z(g)}$$

(Schon gezeigt: $\sum_{g(z)=w} e_z(g) = n$.) Es gilt: die Koeffizienten sind meromorph in w (Übungsaufgabe). Also $Q_* \in \text{Mer}(\overline{\mathbb{C}})[X]$,

$$\mathbb{C} \ni z_0 \mapsto Q_f(z_0), P := Q_{g(w)} \in \mathbb{C}(g)[X]$$

- $\deg P$ (als Polynom) $= n$
- $P(f)(z_0) = Q_{g(z_0)}(f(z_0)) = \prod_{\substack{z \in \mathbb{C} \\ g(z)=g(z_0)}} (f(z_0) - f(z))^{e_z(g)} = 0$ (z_0 kommt unter den z über die das Produkt läuft vor, somit ist ein Faktor des Produkte $= 0$) \square

5.6 \mathbb{C}/Γ als algebraische Struktur

5.6.1 Projektive Räume

Definition 5.10.

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^*$$

= »Menge aller Untervektorräume der Dimension 1 in \mathbb{C}^{n+1} ohne $\vec{0}$ «. D.h. die Menge der Äquivalenzklassen von Vektoren $\neq \vec{0}$ in \mathbb{C}^{n+1} , wobei die Äquivalenzrelation erklärt ist durch: $\vec{x} \sim \vec{y} \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* : \vec{x} = \lambda \vec{y}$ (die Gerade durch \vec{x} und \vec{y} , ohne $\vec{0}$ selbst). $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ heißt der ***n*-dimensionale projektive Raum über \mathbb{C}** .

Definition 5.11.

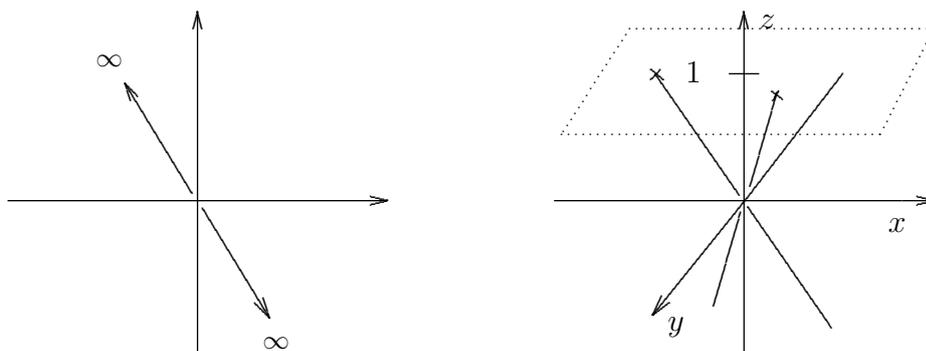
$$\begin{aligned} [x_0 : x_1 : \dots : x_n] &:= \left\{ \lambda(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid \lambda \in \mathbb{C}^*, (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\} \\ &= \mathbb{C}^*(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

heißen **homogene Koordinaten** des Vektors (x_0, x_1, \dots, x_n) .

Bemerkung:

- $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [\frac{x_0}{x_1} : 1 : \dots : \frac{x_n}{x_1}]$ etwa falls $x_1 \neq 0$ (ein x_i ist immer $\neq 0$, da der Nullvektor ausgeschlossen wurde)
- $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), (x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto [x_0 : \dots : x_{n-1} : 1]$ ist injektiv
- die Punkte der Gestalt $[x_0 : \dots : x_{n-1} : 0]$ heißen **unendlich ferne Punkte**
- Man kann die gleiche Konstruktion mit \mathbb{R} statt \mathbb{C} machen: für $n = 2$ hat man die **projektive Ebene über \mathbb{R}** . Vorstellung: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), (x, y) \mapsto [x : y : 1]$ injektiv, die unendlich fernen Punkte sind $[x : y : 0]$

Abbildung 5.5: Die projektive Ebene über \mathbb{R}



a) Die beiden Punkte bei Unendlich werden identifiziert ($\lambda = -1$).

b) \mathbb{R}^2 wird auf die Ebene durch $z = 1$ abgebildet, die unendlich fernen Punkte liegen in der Ebene mit $z = 0$.

Beispiel: 5.3. (»Eine Gleichung projektiv machen«)

$$K := \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\} \subseteq \mathbb{C}^2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \quad (\text{bei reellen Punkten: Einheitskreis})$$

$$(x, y) \mapsto [x : y : 1], \quad \text{Bild} = \left\{ [x : y : z] \mid z \neq 0 \right\} = \left\{ \left[\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1 \right] \mid z \neq 0 \right\}$$

Eigentlich sollte $\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$, d.h. $x^2 + y^2 = z^2$ gelten.

Definition 5.12. \bar{K} = Projektiver Abschluß von K . $\bar{K} := \left\{ [x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid x^2 + y^2 = z^2 \right\}$

$$\bar{K} = \underbrace{K}_{z \neq 0} \cup \underbrace{\{[1 : i : 0], [1 : -i : 0]\}}_{z=0, \text{ siehe Nebenrechnung}}$$

5 Elliptische Funktionen

Nebenrechnung: $z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$, $[x : y : 0]$, aber es sind x, y nicht beide ebenfalls gleich 0 (da der Nullvektor von Anfang an ausgenommen wurde).

Sei $x \neq 0$: also $1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$.

Beispiel: 5.4. Es gibt eine Bijektion zwischen $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ und $\overline{\mathbb{C}}$:

$$g : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, [x : y] \longmapsto \begin{cases} \frac{x}{y} & y \neq 0 \\ \infty & y = 0 \end{cases}$$

Inbesondere ist $\infty \approx [1 : 0]$ und $z \approx [z : 1]$.

Erinnerung: $\mathbb{C}/\Gamma \ni z \longmapsto (\wp(z), \wp'(z)) \subseteq \{(x, y) \mid y^2 = 4x^3 - 20ax - 28b\}$. Mit $A := -20a, B := -28b$ wird daraus

$$\{(x, y) \mid y^2 = 4x^3 + Ax + B\}$$

Definition 5.13. Definiere $E(= E_\Gamma) := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid zy^2 = 4xz^3 + Axz^2 + Bz^3\}$

Bemerkung: $E = \{[x : y : 1] \mid y^2 = 4x^3 + Ax + B\} \cup \{[0 : 1 : 0]\}$

Bezeichnung: Für $p \in \mathbb{C}/\Gamma, f \in \text{Ell}(\Gamma)$, setze $f(p) = f(z)$, wobei $z \in p$ (d.h. $p = z + \Gamma$).

Satz 5.14. Die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{C}/\Gamma \longrightarrow E, \quad p \longmapsto \begin{cases} [\wp(p) : \wp'(p) : 1] & p \neq 0 \\ [0 : 1 : 0] & p = 0 \end{cases}$$

ist wohldefiniert und bijektiv. (Die Abbildung ist sogar ein Homöomorphismus, falls man \mathbb{C}/Γ mit der Quotiententopologie und E mit der Spurtopologie der Quotiententopologie auf dem $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ versieht.)

Bemerkung: Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$: dann ist $[\wp(z), \wp'(z) : 1] \stackrel{\wp'(z) \neq 0}{=} \left[\frac{\wp(z)}{\wp'(z)} : 1 : \frac{1}{\wp'(z)} \right]$, bei $z = 0 : [0 : 1 : 0]$.

Beweis. injektiv: Sei $\Phi(p) = \Phi(q)$, sei $z \in p, w \in q$. O.B.d.A. $p, q \neq 0$, also $[\wp(z) : \wp'(z) : 1] = [\wp(w) : \wp'(w) : 1]$, d.h. $\wp(z) = \wp(w), \wp'(z) = \wp'(w)$. Es gilt ($\wp(z) = \wp(w)$, $\deg \wp = 2$, \wp ist gerade, jeder Wert wird von \wp 2-mal angenommen) $\Rightarrow z \equiv \pm w \pmod{\Gamma}$.

Sei $z \equiv -w \pmod{\Gamma}$, dann folgt $\wp'(z) = \wp'(-w) \stackrel{\wp' \text{ ungerade}}{=} -\wp'(w) = -\wp'(z)$. Es folgt entweder $\wp'(z) \neq 0$, dann ist $z \equiv w \pmod{\Gamma}$, d.h. $p = q$, oder $\wp'(z) = 0$, dann ist $z \equiv \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}$ oder $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$.

surjektiv: Sei $[x : y : z] \in E$: o.B.d.A. sei $z = 1$ ($z = 0 : [x : y : z] = \Phi(0)$). Es gilt also $y^2 = 4x^3 + Ax + B$. Es gibt ein $z \in \mathbb{C}/\Gamma$ mit $x = \wp(z)$ (nach einem früheren Satz). Dann ist

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 + A\wp(z) + B = 4x^3 + Ax + B = y^2.$$

Also ist $\wp'(z) = \pm y$.

Ist $\wp'(z) = +y$: ok; andernfalls betrachte $-z$ statt z , dann gilt $x = \wp(-z), y = \wp'(-z)$.
gerade □
ungerade

Bemerkung:

- es wurde schon gezeigt:

$$\wp'(z) = \frac{\sigma(z - \frac{\omega_1}{2})\sigma(z - \frac{\omega_2}{2})\sigma(z + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2})}{\sigma(z)^3}$$

- ferner:

$$\wp(z) - \wp(w) = \frac{\sigma(z - w)\sigma(z + w)}{\sigma(z)^3}$$

es gibt 2 Pole und 2 Nullstellen:

$$D_{\wp(*)-\wp(w)} = -2(0) + (w + \Gamma)(w - \Gamma)$$

Damit: $\Phi : z + \Gamma \mapsto [\wp(z) : \wp'(z) : 1]$ für $z \notin \Gamma$

$$= [\sigma(z - w)\sigma(z + w)\sigma(z) : \sigma(z - \frac{\omega_1}{2})\sigma(z - \frac{\omega_2}{2})\sigma(z + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}) : \sigma(z)^3]$$

(dabei gilt für w : $\wp(w) = 0$)

für $z \in \Gamma$ macht dies auch Sinn, dann gilt:

$$[0 : \underbrace{\sigma(-\frac{\omega_1}{2})\sigma(-\frac{\omega_2}{2})\sigma(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2})}_{\neq 0} : 0] = [0 : 1 : 0]$$

Definition 5.14. Eine Teilmenge der Gestalt

$$G_{(\alpha, \beta, \gamma)} := \{[x : y : z] \mid \alpha x + \beta y + \gamma z = 0, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \text{ geeignet}\}$$

heißt **Gerade** in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Bemerkung: $G_{(\alpha, \beta, \gamma)} = G_{(\alpha', \beta', \gamma')} \iff (\alpha, \beta, \gamma) = c(\alpha', \beta', \gamma')$, für ein $c \in \mathbb{C}^*$. Also hängt $G_{(\alpha, \beta, \gamma)}$ von der Klasse von (α, β, γ) in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ab.

Dualitätsprinzip:

Z.B.: Je zwei verschiedene Geraden bestimmen genau einen Punkt.

Je zwei verschiedene Punkte bestimmen genau eine Gerade.

Satz 5.15. Sei $g \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ eine Gerade, dann schneiden sich g und E_Γ in genau 3 Punkten (mit Vielfachheiten gezählt).

Beweis. Sei F **homogenes Polynom** (d.h. alle Monome haben den gleichen Grad) vom Grad d in 3 Variablen x, y, z . Sei $g := \{[x : y : z] \mid \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\}$, $[\alpha : \beta : \gamma] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Gesucht sind Lösungen von

$$(*) \quad \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \end{cases} .$$

Wähle $T \in GL(3, \mathbb{C})$ mit

$$(\alpha, \beta, \gamma)T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z.$$

D.h. $(\alpha, \beta, \gamma)T = (0, 0, 1)$, wähle $T = (s_1, s_2, s_3)$ mit $(\alpha, \beta, \gamma)s_i = 0$ für $i = 1, 2$ (s_1, s_2 sind dann orthogonales Komplement zu (α, β, γ) , insbesondere seien s_1, s_2 linear unabhängig) und $(\alpha, \beta, \gamma)s_3 = 1$.

Wir suchen daher Lösungen des Transformierten Gleichungssystems

$$(**) \quad \begin{cases} \tilde{F}(x, y, z) := F\left(T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 0 \\ (\alpha, \beta, \gamma)T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z = 0 \end{cases} .$$

(Zwischen den Lösungen von (*) und (**) besteht eine 1 : 1 Beziehung via

$$[x : y : z] \mapsto [x' : y' : z'], \text{ wobei } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Lösungen von (**) sind alle $[x : y : 0]$ mit

$$(***) \quad G(x, y) := \tilde{F}(x, y, 0) = 0.$$

G ist homogenes Polynom vom Grad d .)

Es gibt Zahlen $a_j, b_j \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, d$, so dass $G(x, y) = \prod_{j=1}^d (b_j x - a_j y)$.

($G(x, y) = y^d G(\frac{x}{y}, 1)$, denn $G = \sum * x^k y^{d-k}$ und $y^d G(\frac{x}{y}, 1) = y^d \sum * (\frac{x}{y})^k = y^d \text{const} \prod_{j=1}^d (\frac{x}{y} - \rho_j)$ (ρ_j seien Nullstellen von $G(u, 1) \in \mathbb{C}[u]$))

Lösungen von (***) : $[a_j : b_j : 0], j = 1, \dots, d$ □

Bemerkung: $\{[x : y : z] \mid F(x, y, z) = 0\}$ heißt »Kurve vom Grad d in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ «. Man kann zeigen: Die Anzahl der Schnittpunkte zweier Kurven vom Grad d und e (mit Vielfachheiten gezählt) ist gleich $e \cdot d$.

Vorbemerkung: Sei $p \in \mathbb{C}/\Gamma$: $\Phi(-p) = [\wp(-p) : \wp'(-p) : 1] = [\wp(p) : -\wp'(p) : 1]$, wegen $z = 1 \Rightarrow E = \{y^2 = 4x^3 + Ax + B\}$ und y^2 symmetrisch zur x -Achse.

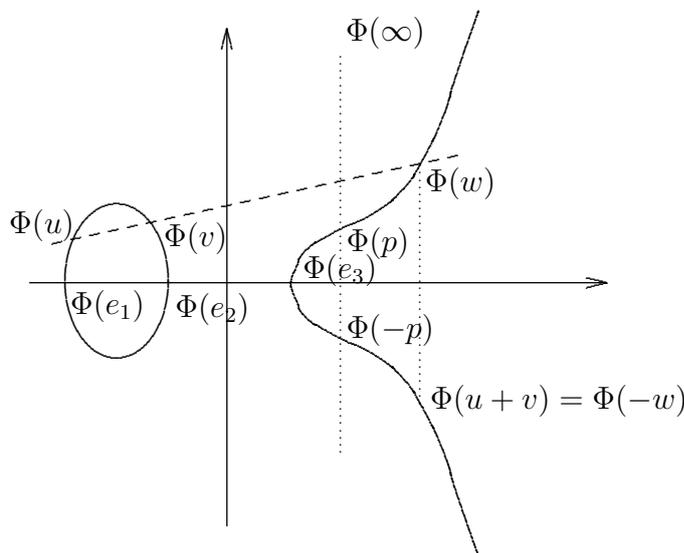


Abbildung 5.6: Addition auf elliptischen Kurven

Für die Punkte $\Phi(e_1), \Phi(e_2), \Phi(e_3)$ auf der x -Achse gilt:

$$\{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \frac{\omega_1}{2} + \Gamma, \frac{\omega_2}{2} + \Gamma, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \Gamma \right\}$$

Satz 5.16. Seien $u, v, w \in \mathbb{C}/\Gamma$, $u + v + w = 0$, dann sind $\Phi(u), \Phi(v), \Phi(w) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ kollinear (d.h. sie liegen auf ein und derselben Geraden in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$) (siehe Abbildung 5.6).

Beweis. Seien o.B.d.A. $u, v, w \neq 0$ sonst ist die Aussage klar, denn etwa für $w = 0$ gilt $v = -u$ und dann liegen $\Phi(-u)$ und $\Phi(0)$ auf der Geraden $\{[x : y : z] \mid x - \wp(u) = 0\}$.

Fall: $u \neq v$ (der Fall $u = v$ zur Übung):

Sei $[\alpha : \beta : \gamma]$ die Koordinate der Geraden durch $\Phi(u)$ und $\Phi(v)$.

(Schreibe $\Phi(u) = [x : y : z]$, $\Phi(v) = [x', y', z']$, wegen $u \neq v$ und Φ injektiv gilt: $\Phi(u) \neq \Phi(v)$, daher sind $(x, y, z), (x', y', z')$ linear unabhängig. Also existiert genau ein (α, β, γ) (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten) mit:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0.$$

)

5 Elliptische Funktionen

Betrachte $f = \alpha\wp + \beta\wp' + \gamma \in \text{Ell}(\Gamma)$. Wir nehmen $\beta \neq 0$ an: dann ist $D_f = -3(0) + (u) + (v) + (w)$. Nach Wahl von α, β, γ gilt:

$$(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} \wp(\xi) \\ \wp'(\xi) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{für } \xi = u, v.$$

Also $\Phi(w) = [\wp(q) : \wp'(q) : 1] \in$ »der durch $[\alpha : \beta : \gamma]$ bestimmten Geraden«. \square

Bemerkung:

- Sind $u, w \in \mathbb{C}/\Gamma, u + u + w = 2u + w = 0$, dann liegen $\Phi(u), \Phi(w)$ auf der Tangente an die Kurve E_Γ in $\Phi(u)$.
- Der Punkt $[0 : 1 : 0]$ ist ein Dreifachpunkt von E_Γ

(Tangente: Sei die Kurve in \mathbb{C}^2 gegeben durch $F(X, Y) = 0, F \in \mathbb{C}[X, Y], F(X_0, Y_0) = 0$, dann ist die Tangente an X_0, Y_0 gegeben durch

$$F_x(X_0, Y_0)(X - X_0) + F_y(X_0, Y_0)(Y - Y_0) = 0.$$

)

Satz 5.17 (Additionstheorem). Seien $u, v, w \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ paarweise verschieden und $u + v + w = 0$, dann gilt

$$\wp(u) + \wp(v) + \underbrace{\wp(w)}_{\substack{=\wp(-(u+v)) \\ =\wp(u+v)}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(v) - \wp'(u)}{\wp(v) - \wp(u)} \right)^2.$$

(Also $\wp(u + v) =$ algebraischer Ausdruck in $\wp(u), \wp(v), \wp'(u), \wp'(v)$.)

Beweis. Seien $\bar{u} = u + \Gamma, \bar{v} = v + \Gamma, \bar{w} = w + \Gamma$ die Restklassen. $\Phi(\bar{u}), \Phi(\bar{v}), \Phi(\bar{w})$ liegen auf einer Geraden durch $\Phi(\bar{u}), \Phi(\bar{v})$:

$$y = \underbrace{\frac{\wp'(v) - \wp'(u)}{\wp(v) - \wp(u)}}_{=:m} (x - \wp(u)) + \wp'(u)$$

Dann hat $y^2 - (4x^3 + Ax + B) =$

$$(m(x - \wp(u)) + \wp'(u))^2 - (4x^3 + Ax + B) = 0 \quad (*)$$

drei Nullstellen $\wp(\bar{u}), \wp(\bar{v}), \wp(\bar{w})$, man kann (*) also schreiben als

$$(x - \wp(\bar{u}))(x - \wp(\bar{v}))(x - \wp(\bar{w})) = 0. \quad (**)$$

Durch Vergleich der Koeffizienten von x^2 in (*) und (**) findet man:

$$\underbrace{\wp(\bar{u}) + \wp(\bar{v}) + \wp(\bar{w})}_{\text{aus}(*)} = \frac{1}{4} m^2. \quad \square$$

aus(**)

Bemerkung: $u, v, w \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ paarweise verschieden $u + v + w = 0$, dann gilt

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \wp(u) & \wp(v) & \wp(w) \\ \wp'(u) & \wp'(v) & \wp'(w) \end{vmatrix} = 0,$$

da $\Phi(u) = [\wp(u) : \wp'(u) : 1]$, $\Phi(v) = [\wp(v) : \wp'(v) : 1]$, $\Phi(w) = [\wp(w) : \wp'(w) : 1]$ auf einer Geraden liegen, deswegen sind die Vektoren linear abhängig und die Determinante ist 0.

Diskriminante eines Polynoms

Für ein quadratisches Polynom $f(x) = x^2 + px + q$ ist die Diskriminante $\Delta := p^2 - 4q$. Sind δ_1, δ_2 Nullstellen von f so gilt auch $f(x) = (x - \delta_1)(x - \delta_2)$, dann lässt sich Δ schreiben als: $(\delta_1 - \delta_2)^2$, $\delta_{1,2} = -\frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Für ein kubisches Polynom $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$, bzw. $f(x) = x^3 + cx^2 + ax + b$ ist $\Delta := \prod_{i < j} (a_i - a_j)^2$. Nach einem Satz gilt für $c = 0$: $\Delta = -(4a^3 + 27b^2)$.

Δ misst den Abstand der verschiedenen Nullstellen, sind zwei Nullstellen gleich, so ist $\Delta = 0$.

Erinnerung: $\wp'^2 = 4\wp^3 + A\wp + B$

Satz 5.18. Die Diskriminante von $x^3 + \frac{A}{4}x + \frac{B}{4}$ ($\Delta = -\frac{1}{16}(A^3 + 27B^2)$) ist $\neq 0$.

Beweis. Zu zeigen: die Nullstellen von $x^3 + Ax + B$ sind paarweise verschieden, Nullstellen sind $\wp(u)$ mit $\wp'(u) = 0$, d.h. $\wp(\frac{\omega_1}{2}), \wp(\frac{\omega_2}{2}), \wp(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2})$, (also $\wp(p)$ wobei $p \in \mathbb{C}/\Gamma, p \neq 0, 2p = 0$). Diese sind paarweise verschieden, sonst folgt: $\wp(z) = \wp(z') \iff z \equiv z' \pmod{\Gamma}$. \square

Bemerkung:

- $\wp(\frac{\omega_1}{2}) + \wp(\frac{\omega_2}{2}) + \wp(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}) = 0$
- $\Delta = \prod_{i < j} (e_i - e_j)^2$, wo $e_1 = \wp(\frac{\omega_1}{2}), e_2 = \wp(\frac{\omega_2}{2}), e_3 = \wp(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2})$
- $\Delta \neq 0$ ist äquivalent dazu, dass die Kurve E_Γ keine singulären Punkte (im Sinne der algebraische Geometrie) besitzt.

5.7 \mathbb{C}/Γ als Riemannsche Fläche

Definition 5.15 (allgemeine Riemannsche Fläche). X heißt **Riemannsche Fläche**, falls gilt:

1. X ist zusammenhängender topologischer Raum
2. Es existiert eine Familie von Karten $\mathcal{A} := \{(t_i, U_i)\}_{i \in I}$
(Karte: $U \subseteq X$ offen, $t_i : U \xrightarrow{\text{homöomorph}} \text{offene Teilmengen von } \mathbb{C}$), so dass

5 Elliptische Funktionen

a) $X = \bigcup_{i \in I} U_i$

b) Ist $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, so ist $t_i \circ t_j^{-1} : t_j(U_i \cap U_j) \rightarrow t_i(U_i \cap U_j)$ biholomorph.

Beispiel: 5.5. Beispiele für Riemannsche Flächen:

- $U \subseteq \mathbb{C}$ offen ist Riemannsche Fläche, $X = U, \mathcal{A} = \{(id, U)\}$
- $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$,

$$t_0 : \bar{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} = \mathbb{C} \xrightarrow{id} \mathbb{C}$$

$$t_\infty : \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

- $X : \mathbb{C}/\Gamma$ ist topologischer Raum, via »Quotiententopologie« (d.h. $U \subseteq \mathbb{C}/\Gamma$ heißt offen $\iff \Pi^{-1}(U)$ ist offen, dabei ist Π die kanonische Projektion $\Pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma, z \mapsto z + \Gamma$.)

Sei $d := \min \{|\omega| \mid \omega \in \Gamma, \omega \neq 0\}$, $\mathcal{A} := \{(t_{z_0}, U_{z_0})\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, wobei $t_{z_0} = \Pi_{z_0}^{-1}$ ist, mit

$$\Pi_{z_0} : \underbrace{\left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \frac{d}{2} \right\}}_{V_{z_0}} \rightarrow \underbrace{\Pi(V_{z_0})}_{U_{z_0}}.$$

$\Pi(V_{z_0})$ ist offen, Π ist surjektiv, ebenfalls injektiv, da d entsprechend gewählt wurde (siehe Abbildung 5.7).)

- \mathbb{C}/Γ ist kompakte Riemannsche Fläche, da: $\mathbb{C}/\Gamma = \Pi(\bar{F})$, \bar{F} kompakt ist und Π stetig ist.

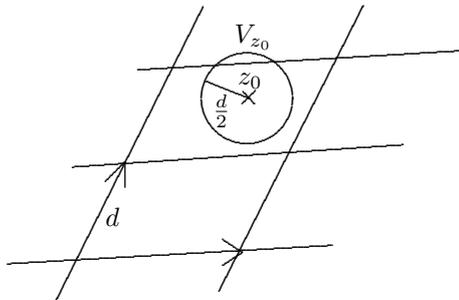


Abbildung 5.7: Quotienten Topologie

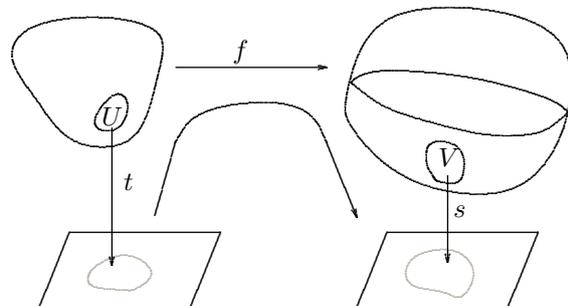


Abbildung 5.8: Holomorphiebegriff auf Riemannschen Flächen

Definition 5.16. Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f : X \rightarrow Y$ sei stetig.

- (siehe 5.8) f heißt **holomorph**, falls für alle Karten (s, V) von Y und (t, U) von X gilt:

$$s \circ f \circ t^{-1} \quad (\text{jeweils eingeschränkt auf die Definitionsbereiche})$$

ist holomorph.

- X, Y heißen **isomorph** (bzw. **biholomorph äquivalent**), falls eine **biholomorphe** Abbildung $f : X \rightarrow Y$ existiert (d.h. eine holomorphe und bijektive Abbildung $X \rightarrow Y$, deren Umkehrung auch holomorph ist).
- $\text{Mer}(X) := \{ f : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \mid f \text{ holomorph} \}$

Bemerkung: $\text{Mer}(X)$ ist ein Körper.

Satz 5.19. Eine Abbildung $f : \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ist holomorph, genau dann wenn $f \circ \Pi : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ holomorph ist. Insbesondere definiert die Abbildung $f \mapsto f \circ \Pi$ einen Körperisomorphismus $\text{Mer}(\mathbb{C}/\Gamma) \xrightarrow{\cong} \text{Ell}(\Gamma)$ (siehe Abbildung 5.9).

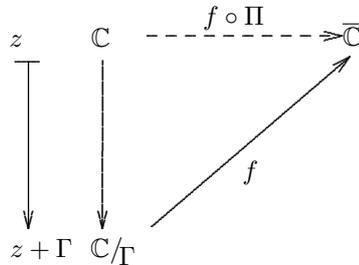


Abbildung 5.9: $f \mapsto f \circ \Pi$ ist ein Körperisomorphismus

(Der Beweis lässt sich aus den Definitionen folgern.)

Satz 5.20. Seien $\Gamma, \Delta \subseteq \mathbb{C}$ Gitter. Dann sind \mathbb{C}/Γ und \mathbb{C}/Δ biholomorph äquivalent, falls $\Delta = \mu\Gamma$ mit geeignetem $\mu \in \mathbb{C}^*$.

Beweis. \Rightarrow : Das ist etwas tieferliegend, deswegen wird es hier nicht gezeigt.

\Leftarrow : $\alpha : \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{C}/\Delta, z + \Gamma \mapsto \mu(z + \Gamma) = \mu z + \Delta$ ist wohldefiniert und biholomorph. □

Satz 5.21. $\text{Ell}(\Gamma)$ und $\text{Ell}(\Delta)$ sind isomorph als Körper, genau dann wenn $\Delta = \mu\Gamma$ mit geeigneten $\mu \in \mathbb{C}^*$.

Beweis. \Rightarrow : Wie eben zu tief liegend, um es hier zu beweisen.

\Leftarrow : $\alpha^* : \text{Ell}(\Delta) \rightarrow \text{Ell}(\Gamma), f \mapsto f \circ \alpha$ ist ein Isomorphismus von Körpern. □

5.8 Variation des Gitters

Definition 5.17. Die Gitter $\Gamma, \Delta \subseteq \mathbb{C}$ heißen **ähnlich** (in Zeichen $\Delta \sim \Gamma$), falls $\Delta = \mu\Gamma$ mit geeignetem $\mu \in \mathbb{C}^*$.

Bemerkung: \sim ist eine Äquivalenzrelation.

Satz 5.22. Für $\tau \in \mathfrak{h} (= \{ \tau \in \mathbb{C} \mid \Im \tau > 0 \})$ sei

$$L_\tau := \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \cdot 1.$$

Die Abbildung

$$\mathcal{L} : \mathfrak{h} \longrightarrow \{ \Gamma \mid \Gamma \subseteq \mathbb{C}, \Gamma \text{ Gitter} \} / \sim, \tau \longrightarrow \{ \mu L_\tau \mid \mu \in \mathbb{C}^* \}$$

ist surjektiv.

Es gilt $\mathcal{L}(\tau) = \mathcal{L}(\tau')$, genau dann wenn es ein $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ gibt mit

$$\tau' = A\tau \quad \left(= \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right).$$

Insbesondere induziert \mathcal{L} eine Bijektion

$$SL(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{h} \underset{\text{Orbits}}{\xrightarrow{\sim}} \text{Gitter in } \mathbb{C} / \sim.$$

Bemerkung: Man kann zeigen:

- Jede kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht 0 ist isomorph zu $\overline{\mathbb{C}}$.
- Jede kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht 1 ist isomorph zu einem \mathbb{C}/Γ (schwierig). Daher definiert die Abbildung $\tau \mapsto$ Äquivalenzklassen von $\mathbb{C}/\mathcal{L}(\tau)$ eine Bijektion

$$SL(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} (\text{kompakte Riemannsche Flächen vom Geschlecht 1}) / \text{Biholomorphie}.$$

Beweis. \mathcal{L} ist surjektiv: Sei $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Dann ist $\Gamma \sim \mathbb{Z}\frac{\omega_1}{\omega_2} + \mathbb{Z} \cdot 1 (= \frac{1}{\omega_2}\Gamma) = \mathbb{Z}(-\frac{\omega_1}{\omega_2}) + \mathbb{Z} \cdot 1$, aber $\Im(\frac{\omega_1}{\omega_2})$ oder $\Im(-\frac{\omega_1}{\omega_2}) > 0$, d.h. $\Gamma \sim L_{\frac{\omega_1}{\omega_2}}$ bzw. $\Gamma \sim L_{-\frac{\omega_1}{\omega_2}}$.

Sei $\mathcal{L}_\Gamma \sim \mathcal{L}_{\Gamma'}$, d.h. $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} = \mu(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}), \mu \in \mathbb{C}^*$. Es folgt

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\tau' \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \text{ oder } \in -\mathbf{1}_2 SL(2, \mathbb{Z})$$

Es folgt $\tau' = \frac{\mu\tau'}{\mu} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = A\tau$, wegen $\Im\tau' > 0$ und $\Im\tau' = \frac{(ad-bc)\Im\tau}{|c\tau + d|^2}$, folgt $ad - bc > 0$, d.h. $A \in SL(2, \mathbb{Z})$.

Die Schlüsse sind umkehrbar und zeigen daher auch „ \Leftarrow “.

□

Definition 5.18.

$$\wp(\tau, z) := \wp(z, \underbrace{\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}}_{L_\tau})$$

$A(\tau), B(\tau)$ die Koeffizienten, so gewählt dass

$$\left(\frac{d}{dz}\wp(\tau, z)\right)^2 = 4\wp(\tau, z)^3 + A(\tau)\wp(\tau, z) + B(\tau).$$

Satz 5.23. Für $G = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ gilt:

$$\begin{aligned} \wp(G\tau, \frac{z}{c\tau + d})(c\tau + d)^{-2} &= \wp(\tau, z) \\ A(G\tau)(c\tau + d)^{-4} &= A(\tau) \\ B(G\tau)(c\tau + d)^{-6} &= B(\tau) \end{aligned}$$

Beweis. Zur Erinnerung: $\frac{d}{dz}\wp(\tau, z) = 4\wp(\tau, z)^3 + A(\tau)\wp(\tau, z) + B(\tau)$.

$$\begin{aligned} \wp(G\tau, \frac{z}{c\tau + d})(c\tau + d)^{-2} &= \frac{1}{(c\tau + d)^2} \left(\frac{1}{(\frac{z}{c\tau + d})^2} + \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}G\tau + \mathbb{Z} \\ \gamma \neq 0}} \frac{1}{(\frac{z}{c\tau + d} - \gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}G\tau + \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{(z - (c\tau + d)\gamma)^2} - \frac{1}{((c\tau + d)\gamma)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \delta := (c\tau + d)\gamma \text{ folgt: } = \frac{1}{z^2} + \sum_{\delta \in \mathbb{Z}(a\tau + b) + \mathbb{Z}(c\tau + d)} \left(\frac{1}{(z - \delta)^2} - \frac{1}{\delta^2} \right). \quad (*)$$

Eine Basis von (*) ist:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ also ist auch } \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} \text{ eine Basis, da } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \\ \Rightarrow (*) = \wp(\tau, z). \end{aligned}$$

Laurententwicklung von \wp um $z = 0$:

$$\begin{aligned} \wp(\tau, z) &= \frac{1}{z^2} + c_1 A(\tau)z^2 + c_2 B(\tau)z^4 + \dots, \quad c_1, c_2 = \text{const, unabhängig von } z, \tau \\ &= \wp(G\tau, \frac{z}{c\tau + d})(c\tau + d)^{-2} \\ &= \frac{1}{(c\tau + d)^2} \left(\frac{1}{(\frac{z}{c\tau + d})^2} + c_1 A(G\tau) \frac{z^2}{(c\tau + d)^2} + c_2 B(G\tau) \frac{z^4}{(c\tau + d)^4} + \dots \right) \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Behauptung für $A(G\tau)$ und $B(G\tau)$. \square

5 Elliptische Funktionen

Bemerkung: In dem Gitter $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}1$ hat \wp die Periode 1, die typische Funktion mit Periode 1 ist $e^{2\pi iz} =: \zeta$. Für $G := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ gilt $G\tau = \tau + 1$, $\frac{z}{c\tau+d} = z$. Nach obigem Satz hat also \wp auch die Periode 1 bzgl. τ . Sei $q := e^{2\pi i\tau}$.

Satz 5.24.

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \wp(\tau, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(q^{n/2} \zeta^{1/2} - q^{-n/2} \zeta^{-1/2})^2} + \frac{1}{12} \left(1 - 12 \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{q^{n/2} - q^{-n/2}} \right)$$

Es gilt die Konvention $\xi^{1/2} = e^{2\pi iz/2}$ für $\xi = \zeta, q$.

Beweis. Sei τ fix, die Reihe konvergiert gleichmäßig absolut auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$ (ohne Beweis). Die Reihe stellt eine in $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ holomorphe Funktion dar (sei $\tilde{\wp}(z)$ die rechte Seite). Singularitäten:

$$z : \frac{1}{(q^{n/2} \zeta^{1/2} - q^{-n/2} \zeta^{-1/2})^2} = \frac{q^n \zeta}{(q^n \zeta - 1)^2}$$

Singularität falls: $q^n \zeta = 1$
 $\iff 2\pi i \tau n + 2\pi i z \in 2\pi i \mathbb{Z} \iff z \in -n\tau + \mathbb{Z}$

Hauptteil von $\tilde{\wp}$ bei 0:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2})^2} &= \frac{1}{4(\sinh^2(\pi iz))} \\ (\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = x(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots)) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2 z^2 (1 + O(z^2))} = \frac{1}{(2\pi i)^2 z^2} \end{aligned}$$

Also ist $\frac{1}{(2\pi i)^2} \wp(\tau, z) - \tilde{\wp}(z)$ holomorph bei 0, also holomorph in allen $\gamma \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ (doppelt periodisch), also nach Liouville I konstant. Der Wert ist 0, da $\wp(\tau, z)$ das Konstantglied gleich 0 hat in der Laurententwicklung um 0, ebenso für $\tilde{\wp}(z)$.

Konstantglied von $\tilde{\wp}(z) =$ Konstantglied von:

$$\frac{1}{(\zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2})^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{(q^{n/2} - q^{-n/2})^2} + \frac{1}{12} \left(1 - 12 \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{q^{n/2} - q^{-n/2}} \right)$$

$$\text{Konstantglied von } \left(\frac{1}{\zeta^{1/2} - \frac{1}{\zeta^{-1/2}}} \right)^2 + \frac{1}{12} = 0 \quad (\text{siehe unten}) \quad \square$$

Korollar 5.4. Für $|q| \leq \min(|\zeta|, |\zeta|^{-1})$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi i)^2} \wp(\tau, z) &= \frac{1}{\zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} d(\zeta^d + \zeta^{-d}) q^n \right) \\ &\quad + 12 \left(1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) \right) q^n \end{aligned}$$

Dabei ist $\sigma_1(n) := \sum_{d|n} d$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a^{1/2} - a^{-1/2})^2} &= \frac{a}{(a-1)^2} \sum_{|a| \leq 1} \frac{d}{da} \frac{1}{1-a} = \sum_{k=1}^{\infty} k a^k \\ \text{Damit: } \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{(q^{n/2} - q^{-n/2})^2} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q^{n/2} - q^{-n/2})^2} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k q^{nk} = 2 \sum_{l=1}^{\infty} q^l \underbrace{\sum_{n \cdot k = l} k}_{=\sigma_1(l)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{(q^{n/2} \zeta^{1/2} - q^{-n/2} \zeta^{-1/2})^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q^{n/2} \zeta^{1/2} - q^{-n/2} \zeta^{-1/2})^2} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q^{-n/2} \zeta^{1/2} - q^{n/2} \zeta^{-1/2})^2} \end{aligned}$$

($a = q^n \zeta, |a| < 1, |q^n \zeta| < 1$, weil $|q\zeta| < 1$, weil $|q| < |\zeta^{-1}|$ und
 $a = q^n \zeta^{-1}, |a| < 1, |q^n \zeta^{-1}| < 1$, weil $|q\zeta^{-1}| < 1$, weil $|q| < |\zeta^{-1}|$ ist.)

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k q^{nk} \zeta^k + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k q^{nk} \zeta^{-k} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} q^l \sum_{k|l} k \zeta^k + \sum_{l=1}^{\infty} q^l \sum_{k|l} k \zeta^{-k} \end{aligned} \quad \square$$

Definition 5.19. Die Zahlen B_n aus der Taylorentwicklung von

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n, \quad |x| < 2\pi, x \in \mathbb{C}$$

heißen **Bernoulli Zahlen**.

Bemerkung:

- Bestimmung der B_n :

$$\begin{aligned}
 x &= \left(\sum \frac{B_n}{n!} x^n \right) (e^x - 1) = \left(\sum \frac{B_n}{n!} x^n \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \right) \\
 &= \sum_l \sum_{\substack{m+n=l \\ m \geq 1}} \left(\frac{B_n}{n!} \frac{1}{m!} \right) x^l \\
 &\Rightarrow \sum_{\substack{m+n=l \\ m \geq 1}} \left(\frac{B_n}{n!} \frac{1}{m!} \right) = \delta_{l,1}
 \end{aligned}$$

Zusammen mit $B_0 = 1$ lassen sich die B_n rekursiv aus der letzten Zeile bestimmen:

k	1	2	4	6	8	10	...
B_k	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$...

- $B_k = 0$ für ungerades $k \geq 3$

Beweis.

$$\text{Betrachte: } \frac{x}{e^x - 1} + \frac{1}{2}x = \sum_{n \neq 0} \frac{B_n}{n!} x^n \quad (*)$$

$$\text{linke Seite} = \frac{x + \frac{1}{2}x(e^x - 1)}{e^x - 1} = \frac{1}{2} \frac{x(e^x + 1)}{e^x - 1}$$

Der letzte Bruch ist aber invariant unter $x \mapsto -x$, ist also eine gerade Funktion; deswegen verschwinden die ungeraden Potenzen auf der rechten Seite von (*). \square

Lemma 5.3.

$$\frac{\coth \frac{x}{2}}{2} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
 \text{linke Seite} &= \frac{1}{2} \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = \frac{1}{e^x - 1} + \frac{1}{2} \\
 &\stackrel{(*)}{=} \sum_{n \neq 1} \frac{B_n}{n!} x^{n-1}
 \end{aligned}$$

Dann folgt die Behauptung aus Definition 5.19. \square

Lemma 5.4.

$$\frac{1}{(\zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2})^2} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \left(\frac{1}{z^2} - \sum \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2k-1)(2\pi i)^{2k} z^{2k-2} \right)$$

Dabei ist $\zeta = e^{2\pi i} z$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(e^{x/2} - e^{-x/2})^2} &= \frac{1}{4 \sinh^2(x/2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overbrace{\frac{\sinh^2(x/2) - \cosh^2(x/2)}{\sinh^2(x/2)}}^{-1} \\ &= \frac{d}{dx} \coth\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{x^2} - \sum \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2k-1)x^{2k-2} \end{aligned}$$

Dann folgt die Behauptung mit $x = 2\pi iz$. □

Definition 5.20.

$$\begin{aligned} \sigma_r(n) &:= \sum_{d|n} d^r \\ E_{2k} &:= 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n)q^n \\ \zeta(s) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{\textit{Riemannsche } \zeta\text{-Funktion}} \end{aligned}$$

Bemerkung:

- $B_{2k} \neq 0$ (siehe unten)
- Die Reihe E_{2k} ist absolut konvergent: $|q| < 1$ und $\sigma_{2k-1} \leq n^{2k}$
- $E_2 = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)q^n$

Satz 5.25.

$$\text{Es gilt } \wp(\tau, z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=2}^{\infty} 2(2k-1)\zeta(2k)E_{2k}(\tau)z^{2k-2}$$

Ferner gilt

$$E_{2k}(\tau) = \left(\sum_{G \in \left(\langle \pm \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \rangle \backslash SL(2, \mathbb{Z}) \right)} \frac{1}{(c\tau + d)^{2k}} \right)$$

dabei ist $G = \begin{bmatrix} * & * \\ c & d \end{bmatrix}$ und die Formel gilt für E_{2k} mit $k \geq 2$.

Beweis. Zweimal Laurententwicklung von \wp um 0, dann Vergleich der Koeffizienten:

$$\wp(\tau, z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \\ \gamma \neq 0}} \frac{1}{(z - \gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}$$

5 Elliptische Funktionen

Der $(2k - 2)$ -te Koeffizient der Laurententwicklung um $z = 0$ ist:

$$\begin{aligned} \frac{(2k-1)!}{(2k-2)!} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \\ \gamma \neq 0}} \frac{1}{\gamma^{2k}} &= (2k-1) \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ (m, n) \neq (0, 0)}} \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}} = (2k-1) \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ \text{ggT}(m, n) = 1}} \frac{1}{(dm\tau + dn)^{2k}} \\ &= (2k-1)\zeta(2k)2 \sum_{\substack{c, d \in \mathbb{Z}, \text{ggT}(c, d) = 1, \\ c \geq 0 \wedge (c=0 \Rightarrow d=1)}} \frac{1}{(c\tau + d)^{2k}} \end{aligned}$$

Betrachte $\sum_{\substack{c, d \in \mathbb{Z}, \text{ggT}(c, d) = 1, \\ c \geq 0 \wedge (c=0 \Rightarrow d=1)}} \frac{1}{(c\tau + d)^{2k}}$:

Sei $G := \left\langle \pm \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$: $G \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$

für: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ mit $\text{ggT}(c, d) = 1$

NR.: $\pm \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} a + *c & b + *d \\ c & d \end{bmatrix}$

Andererseits: ist der $(2k - 2)$ -te Koeffizient der Laurententwicklung von der rechten Seite von:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \wp(\tau, z) = \underbrace{\frac{1}{(\zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2})^2}}_I + \underbrace{\sum_{d|n} d(\zeta^d + \zeta^{-d})q^n}_{II} + \frac{1}{12} E_2$$

um $z = 0$:

$$\begin{aligned} &- (2\pi i)^{2k} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \quad \text{Teil I nach Lemma 5.4} \\ &+ (2\pi i)^{2k} \frac{1}{(2k-2)!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 \sum_{d|n} d^{2k-1} \right) q^n = - (2\pi i)^{2k} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2k-1) E_{2k}(\tau) \end{aligned}$$

Fazit: $E_{2k}(\tau) = \sum_{G \in \left(\left\langle \pm \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \backslash SL(2, \mathbb{Z}) \right)} \frac{1}{(c\tau + d)^{2k}}$ □

Korollar 5.5. *Es ist $\zeta(2k) = -\frac{1}{2} \frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k)!} B_{2k}$.*

Beispiel: 5.6. *Die Berechnung von ζ erfolgt mittels des Korollars. Es ist $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ und $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.*

Bemerkung:

- $\zeta(2k + 1)$ ist bisher unbekannt
- $(\wp(\tau, z)')^2 = 4\wp(\tau, z)^3 - 20a\wp(\tau, z) - 28b = 4(\wp(\tau, z)')^3 - \pi^4 \frac{4}{3} E_4(\tau) \wp(\tau, z) - \pi^6 \frac{8}{27} E_6(\tau)$

6 Modulformen

6.1 Die Modulgruppe und die obere Halbebene

Definition 6.1.

$$\text{Modulgruppe: } \Gamma := SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid ad - bc = 1 \right\}$$

$$\text{obere Halbebene: } \mathfrak{h} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$$

Operationen von Γ auf \mathfrak{h} : zu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$ und $z \in \mathfrak{h}$ sei $Az = \frac{az+b}{cz+d}$. Es ist

- $\mathbb{1}_2 z = z$ (sogar $\pm \mathbb{1}_2 z = z$)
- $A(Bz) = (AB)z$

Spezielle Elemente von Γ

- $S := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $Sz = \frac{-1}{z}$ (Spiegelung)
- $T := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Tz = \frac{z+1}{1}$ (Translation)

$$\text{Nach Beispiel 3.8 gilt: } \Im(Az) = \frac{\Im z}{|cz+d|^2}, \text{ beachte } ad - cb = 1. \quad (*)$$

Moduldreieck: Fundamentalbereich von \mathfrak{h} bzgl. Γ (siehe Abbildung 6.1)

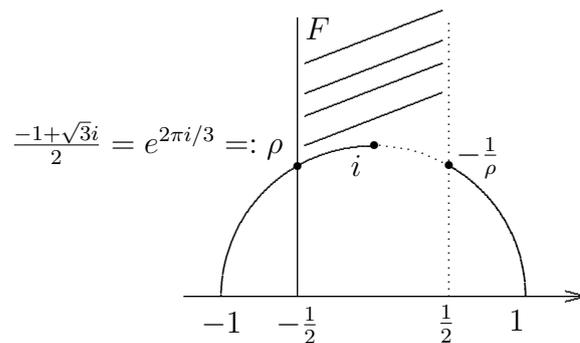


Abbildung 6.1: Fundamentalbereich von \mathfrak{h} .
 i gehört zu F , $-\frac{1}{\rho}$ gehört nicht zu F .

6 Modulformen

Bemerkung: $S^2 = -\mathbb{1}_2$ (wobei $\mathbb{1}_2$ die 2×2 Einheitsmatrix bezeichnet), $S^4 = \mathbb{1}_2$
 $ST = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $(ST)^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $(ST)^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathbb{1}_2$, $(ST)^6 = \mathbb{1}_2$,
 $|\langle S \rangle| = 4$, $|\langle ST \rangle| = 6$, $Si = \frac{-1}{i} = i$, $(ST)\rho = \rho$.

Satz 6.1. Für ein $z \in F$ existiert ein $A \in \Gamma$ mit $Az \in F$, dann ist $Az = z$. Es gilt

$$\Gamma_z (= \{A \in \Gamma \mid Az = z\}) = \begin{cases} \langle \pm \mathbb{1}_2 \rangle, & z \neq i, \rho \\ \langle S \rangle, & z = i \\ \langle ST \rangle, & z = \rho \end{cases}$$

(Γ_z ist der Stabilisator von z).

Beweis. Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$, $Az \in F$.

O.B.d.A. $\Im(Az) \geq \Im(z)$ (sonst ersetze z durch Az und A durch A^{-1}). Dann gilt $|cz + d| \leq 1$ (aus (*)). Wegen $c \in \mathbb{Z}$ und

$$c^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = c^2 \left(\frac{3}{4} \right) \leq \underbrace{c^2 \Im z^2 = \Im(cz + d)^2}_{d \in \mathbb{R} \Rightarrow \Im d = 0} \leq |cz + d|^2 \leq 1$$

(links steht der kleinste Wert, den $c^2 \Im z^2$ annehmen kann, für $z = \rho$). Es folgt $c^2 \frac{3}{4} \leq 1$ mit $c \in \mathbb{Z}$ ist dann $|c| \leq 1$:

Fall $c = 0$: dann $A = \pm \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Az = z + b \Rightarrow b = 0$ wegen $b \in \mathbb{Z}$, $z = Az = z + b \in F$ und wegen $-\frac{1}{2} \leq \Re(z)$, $\Re(z + b) < \frac{1}{2}$ folgt $b = 0$, $A = \pm \mathbb{1}_2$.

Fall $c = -1$: ersetze A durch $-A$ und gehe zum nächsten Fall.

Fall $c = 1$: dann ist $|z + d| \leq 1$, daher ist (mit $z = x + iy$ und $(x + d)^2 = (\Re(z + d))^2$)

$$(x + d)^2 \leq |z + d|^2 \leq 1, \text{ d.h. } |d| - |x| \leq |x + d| \leq 1$$

d.h. $|d| \leq 1 + |x| \leq \frac{3}{2}$, da $|x| = |\Re(z)|$ und $-\frac{1}{2} \leq \Re(z) < \frac{1}{2}$.

Also $d = 0, \pm 1$, und $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0, \pm 1 \end{bmatrix}$.

Unterfall: $z = \rho$: Fallunterscheidung für d :

Unter-Unterfall $d = 0$: dann: $\det A = 1 \Rightarrow b = -1$ und $A\rho = a - \frac{1}{\rho}$. Es folgt $a = \pm 1$ (sonst $a - \frac{1}{\rho} \notin F$). $\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (ST)^2$.

Unter-Unterfall $d = \pm 1$: dann $A = \begin{bmatrix} a & a-1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (sonst $\det A \neq 1$) und dann $A\rho = \frac{a\rho + a - 1}{\rho + 1} = a - \frac{1}{\rho + 1} = a + \rho$, daher $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = ST$.

Unter-Unterfall $d = -1$: Unmöglich, da $\Re(\rho - 1) = -\frac{3}{2}$, also $|cz + d| > \frac{3}{2} > 1$. (Da $\rho - 1 = cz + d$).

Unterfall $z \neq \rho$: dann $\frac{3}{4} + (x + d)^2 \underset{z \neq \rho}{<} |z + d|^2 \leq 1$, daher $|d| - |x| \leq |x + d| < \frac{1}{2}$,

d.h. $|d| < \frac{1}{2} + |x| \leq 1$ also $d = 0$. $A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $|z| = |cz + d| \leq 1$, also $|z| = 1$. $Az = a - \frac{1}{z} \in F$ (mit $|z| = 1$) impliziert $a = 0$, $z = i \Rightarrow A = S$. \square

Korollar 6.1. *Es ist $z \in \mathfrak{h}$ Fixpunkt von Γ (d.h. $\Gamma_z \neq \{\pm \mathbb{1}_2\}$), genau dann wenn $z = Ai$ oder $z = A\rho$, für ein $A \in \Gamma$ ist.*

Satz 6.2. *$SL(2, \mathbb{Z})$ wird von S und T erzeugt.*

Beweis. 1.) Es ist $G := \langle S; T \rangle \subseteq \Gamma$.

2.) Nehmen wir einmal an, wir hätten bereits gezeigt:

(**) Ist $z \in \mathfrak{h}$, dann existiert ein $B \in G$ mit $Bz \in F$. Damit zeigen wir nun, dass $A \in \Gamma \Rightarrow A \in G$ gilt.

Wähle $z_0 \in F$ fix. Sei $A \in \Gamma$, dann existiert $B \in G$ mit $BAz_0 \in F$ (nach (**)). Dann folgt (voriger Satz) $BAz_0 = z_0$, daher $BA \in \Gamma_{z_0} \subseteq G$ daher $A \in B^{-1}G = G$.

(zu (**): Sei $A \in G$ mit $\Im(Az) = \text{maximal}$. Wähle $n \in \mathbb{Z}$ mit $-\frac{1}{2} \leq \Re(\underbrace{Az + n}_{T^n Az}) < \frac{1}{2}$

oder $ST^n Az \in F$. Dann $\underbrace{T^n A}_G z \in F$: wäre $|T^n Az| < 1$, so $\Im(ST^n Az) = \frac{\Im(T^n Az)}{|Az|} >$

$\Im(T^n Az) = \Im(Az)$ im Widerspruch zur Maximalität von $\Im(Az)$. Also $T^n A(z) \in F$ oder $T^n Az \in \text{»dem gestrichelten Halbbogen in Abbildung 6.1«}$, der nicht zu F gehört.

Dann ist aber $ST^n Az \in \text{»dem Teil der Bogens, der zu } F \text{ gehört «}$. □

6.2 Modulformen

Definition 6.2. *Sei $k \in \mathbb{Z}$: Eine **schwache Modulform vom Gewicht k** (auf Γ) ist eine in \mathfrak{h} meromorphe Funktion f , so dass für alle $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$ gilt:*

$$f(Az)(cz + d)^{-k} = f(z).$$

Bemerkung: *Statt Γ betrachtet man oft auch andere Untergruppen, z.B.*

$$\Gamma_0(l) := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{l} \right\}.$$

Satz 6.3. *Sei f meromorph in \mathfrak{h} . Dann ist f schwache Modulform vom Gewicht k , genau dann wenn gilt*

$$f\left(-\frac{1}{z}\right)z^{-k} = f(z) \text{ und } f(z+1) = f(z)$$

Beweis. Der Beweis folgt aus $\Gamma = \langle S, T \rangle$ und dem folgenden Lemma. □

Lemma 6.1. *Sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann wird durch*

$$(f|_k A) := f(Az)(cz + d)^{-k}$$

eine Rechts-Operation von Γ auf $\text{Mer}(\mathfrak{h})$ erklärt (d.h. $(f|_k \mathbb{1}_2) = f, ((f|_k A)|_k B) \stackrel{(+)}{=} (f|_k(AB))$)

6 Modulformen

Beweis. Beweis von (+): (+) ist äquivalent zu $(cz + d)(c'z + d') = c''z + d''$, mit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{bmatrix}$ (die Gleichung folgt durch Nachrechnen) \square

Satz 6.4. *Es gibt keine nichttrivialen schwachen Modulformen von ungeradem Gewicht.*

Beweis. Sei f vom Gewicht k auf Γ , dann gilt $f(z) = f(-1_2 z)(-1)^{-k} = f(z)$. Falls k ungerade ist, so ist $f \equiv 0$. \square

Bemerkung: Die schwachen Modulformen vom Gewicht k bilden einen Vektorraum über \mathbb{C} .

Bemerkung: Die Funktionalgleichung einer schwachen Modulform von geradem Gewicht k kann man auch folgendermaßen interpretieren:

$$\begin{aligned} A^* f(z)(dz)^k &:= f(Az)(dAz)^{k/2} \\ \left(\text{mit } dAz &= d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2} dz \right) \\ &= f(Az) \frac{1}{(cz+d)^k} dz = f(z) dz \end{aligned}$$

Dabei induziert A einen Operator A^* auf Differentialformen.

Satz 6.5. *Sei f eine schwache Modulform vom Gewicht k auf Γ . Dann existiert eine in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ meromorphe Funktion g , so dass $f(z) = g(e^{2\pi iz})$ ist.¹*

Beweis. Mit $q := e^{2\pi iz}$ ist

$$g(q) := f\left(\frac{1}{2\pi i} \log q\right)$$

mit irgendeinem Zweig des Logarithmus in einer Umgebung von q , g ist wohldefiniert, denn $f(z+n) = f(z) \forall n \in \mathbb{Z}$. \square

Definition 6.3. *Eine schwache Modulform vom Gewicht k heißt **meromorph**, falls g meromorph auf \mathbb{D} (d. h. zusätzlich meromorph bei 0) ist. (Das heißt f ist meromorph bei $i\infty$.)*

Satz 6.6. *Ist f meromorphe Modulform vom Gewicht k auf Γ , dann besitzt f eine Entwicklung der Gestalt*

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_f(n)(e^{2\pi iz})^n$$

Diese Reihe ist absolut konvergent.

Beweis. Die Entwicklung ist die Laurententwicklung von g bei 0. \square

¹Siehe auch die Definition von \tilde{f} in Serre, A Course in Arithmetic, Chapter VII, §2, Proposition 1.

Bemerkung: Ist f meromorphe Modulform vom Gewicht k , dann hat f nur endlich viele Pole in F , dem Moduldreieck.²

Definition 6.4. Eine meromorphe Modulform heißt **holomorph bei $i\infty$** , falls $a_f(n) = 0 \forall n < 0$.

Definition 6.5. Einige wichtige Definitionen:

1. $M_k(\Gamma) =$ die Menge aller holomorphen Modulformen vom Gewicht k auf Γ , die auch bei $i\infty$ holomorph sind

$$= \left\{ f : \mathfrak{h} \xrightarrow{\text{holomorph}} \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \text{i) } f(Az)(cz+d)^{-k} = f(z) \forall A \in SL(2, \mathbb{Z}) \\ \text{ii) } f \text{ besitzt eine absolut konvergente Entwicklung der Gestalt} \\ f(z) = \sum_{n \geq 0} a_f(n) (e^{2\pi iz})^n \end{array} \right\}$$

2.

$$S_k(\Gamma) = \{ f \in M_k(\Gamma) \mid a_f(0) = 0 \}$$

die Menge der **Spitzenformen** vom Gewicht k auf Γ

3. $K(\Gamma) =$ Menge aller meromorphen Modulformen vom Gewicht 0

$$= \left\{ f \text{ meromorph auf } \mathfrak{h} \mid \begin{array}{l} \text{i) } f(Az) = f(z) \forall A \in SL(2, \mathbb{Z}) \\ \text{ii) } f \text{ besitzt eine absolut konvergente Entwicklung der Gestalt} \\ f(z) = \sum_{n \geq -N} a_f(n) e^{2\pi inz} \end{array} \right\}$$

Die Elemente von $K(\Gamma)$ heißen **Modulfunktionen** auf Γ

Bemerkung:

- $M_k(\Gamma), S_k(\Gamma)$ sind Vektorräume über \mathbb{C} , $S_k(\Gamma)$ ist ein Untervektorraum von $M_k(\Gamma)$
- $K(\Gamma)$ ist sogar ein Körper
- $(f, g) \mapsto f \cdot g$ definiert Abbildungen $M_k(\Gamma) \times M_l(\Gamma) \rightarrow M_{k+l}(\Gamma)$

Beispiel: 6.1. Einige Beispiele für Modulformen:

1.

$$E_{2k} = 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n \in M_{2k}(\Gamma) \text{ für } k \geq 2$$

Es ist $E_{2k}(z) = \sum_{A \in (\langle \pm T \rangle \backslash SL(2, \mathbb{Z}))} \mathbb{1}_2|_k A$ hieraus erkennt man die Transformationsformel. Speziell ist:

- $E_4 = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n \in M_4(\Gamma)$
- $E_6 = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n \in M_6(\Gamma)$

2. $\Delta := \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728} = q + O(q) \in S_{12}(\Gamma)$

3. $j := \frac{E_4^3}{\Delta} = q^{-1} + 744 + O(q) \in K(\Gamma)$

²Siehe Serre, Chapter VII, §3, Theorem 3

Bemerkung:

- $E_4(\rho) = 0$, $\rho = e^{2\pi i/3}$, $\Gamma_\rho = \langle ST \rangle$

$$E_4(\rho) = E_4(ST\rho)(\rho + 1)^{-4} = E_4(\rho) \underbrace{e^{-2\pi i 4/6}}_{\neq 1} \Rightarrow E_4(\rho) = 0$$

- $E_6(i) = 0$

$$E_6(i) = E_6(Si)(i)^{-6} = E_6(i)i^2 \Rightarrow E_6(i) = 0$$

- $f(\rho) = 0$, falls $f \in M_k$ und $k \equiv 2, 4, 8, 10 \pmod{12}$
- $f(i) = 0$, falls $f \in M_k$ und $k \equiv 2, 6, 10 \pmod{12}$

6.3 Die Valenzformel

Satz 6.7 (Valenzformel). Sei $f \neq 0$ eine meromorphe Modulform vom Gewicht k auf Γ . Dann gilt:

$$\sum_{\substack{z \in F \\ z \neq i, \rho}} \text{ord}_z f + \frac{1}{2} \text{ord}_i f + \frac{1}{3} \text{ord}_\rho f + \text{ord}_{i\infty} f = \frac{k}{12}$$

$$(n_0 := \text{ord}_{i\infty} : f = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_f(n)q^n, a_f(n_0) \neq 0, q = e^{2\pi iz}, z \in \mathfrak{h})$$

Beweis. $f = g(q)$ und g ist meromorph in $|q| < 1$. Eine Konstante R sei so gewählt, dass $f(z)$ für $\Im z \geq R$ keine weiteren Null- oder Polstellen mehr hat (siehe Abbildung 6.2).

$$\text{Es gilt: } \sum_{z \in F, z \neq i, \rho} \text{ord}_z f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 + \dots + \gamma_8} d \log(f)$$

Denn es ist:

- mit $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} d \log(f) &= - \int_{\gamma_8 (=T\gamma_2)} \underbrace{d \log(f \circ T^{-1})}_{=f} = - \int_{\gamma_8} d \log(f) \\ &\Rightarrow \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_8} = 0 \end{aligned}$$

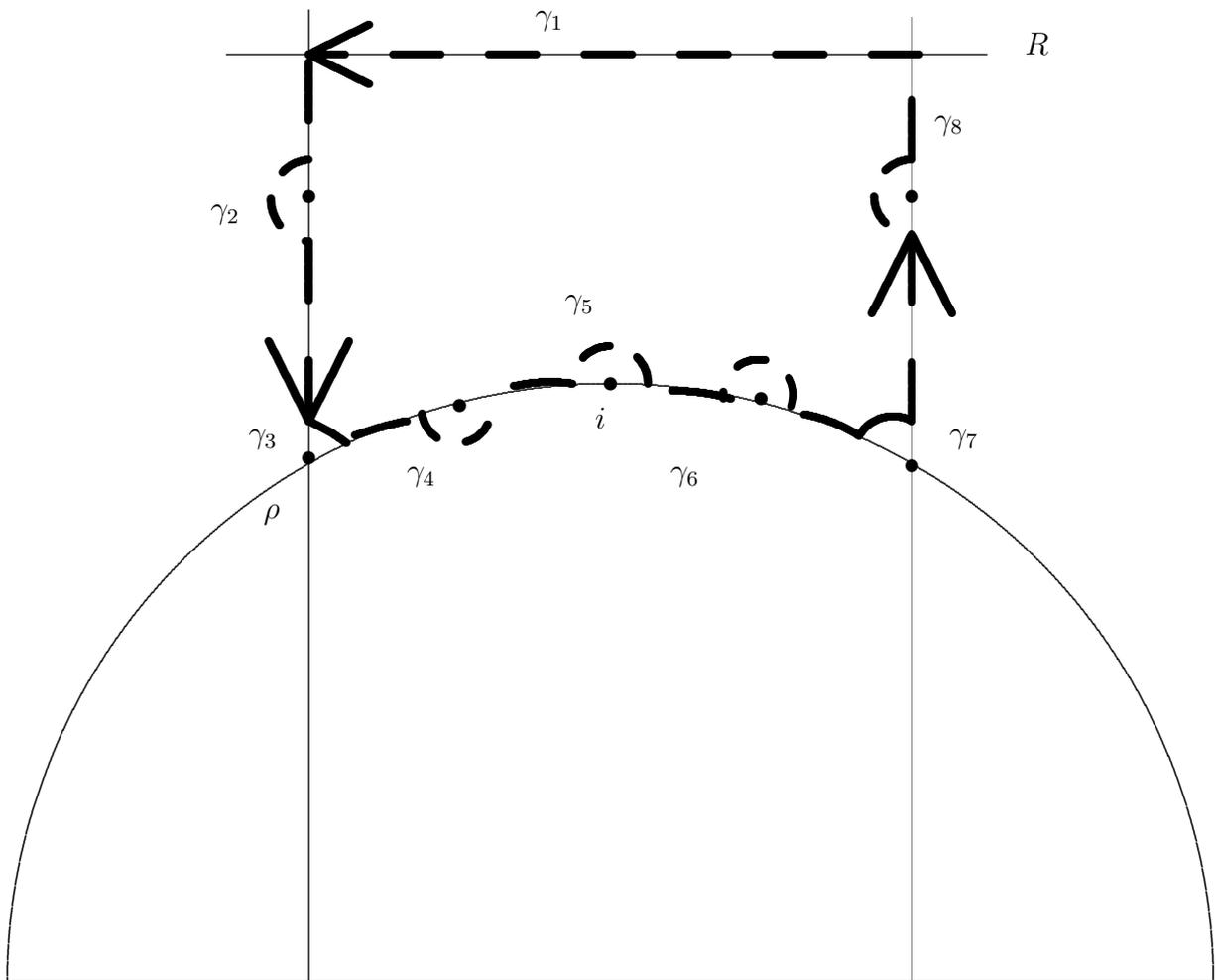


Abbildung 6.2: Beweis der Valenzformel

Null- bzw. Polstellen auf dem Rand von $\gamma_2, \gamma_4, \gamma_6$ und γ_8 wird »ausgewichen«. γ_3, γ_5 und γ_7 weichen den Punkten ρ, i und $-\frac{1}{\rho}$ aus.

•

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} d\log(f) &= - \oint_{|q|=e^{-2\pi R}} d\log(g) = -\text{ord}_0 g = -\text{ord}_{i\infty} f \\ &\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f = -\text{ord}_{i\infty} f \end{aligned}$$

• Sei ϵ der Radius der kleinen Kreisbögen γ_3 und γ_7 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_3} d\log(f) &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{6} \text{ord}_\rho f, \text{ das gleiche gilt für } \int_{\gamma_7} d\log(f) \\ &\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_7} \right) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{3} \text{ord}_\rho f \end{aligned}$$

Der Bruch $1/6$ kommt zustande, da es sich bei γ_3 bzw. γ_7 , im Grenzwert, um einen Sechstel-Kreis handelt.

• Sei ϵ der Radius des kleinen Kreisbogens γ_5 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_5} d\log(f) &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \text{ord}_i f \\ &\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_5} d\log(f) = -\frac{1}{2} \text{ord}_i f \end{aligned}$$

Der Bruch $1/2$ kommt zustande, da es sich bei γ_5 , im Grenzwert, um einen Halbkreis handelt.

• mit $S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ($z \mapsto -\frac{1}{z}$) und $f \circ S = f(z)z^k$:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_6} d\log(f) &= \int_{-S\gamma_4(=\gamma_6)} d\log(f) = - \int_{\gamma_4} d\log(f(Sz)) = - \int_{\gamma_4} (d\log(f) + d\log(z^k)) \\ \text{also } \int_{\gamma_6} + \int_{\gamma_4} &= \int_{\gamma_4} d\log(z^k) \quad (= \int_{\gamma_4} \frac{k}{z} dz) \\ &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma_4} \frac{k}{z} dz = \frac{k}{12} \end{aligned}$$

Der Bruch $k/12$ kommt zustande, da es sich bei γ_4 , im Grenzwert, um einen Zwölftel-Kreis handelt.

Alles zusammengenommen beweist die Behauptung. □

Bemerkung:

• In dem Moduldreieck D existieren nur endlich viele Null- oder Polstellen von f .

• $\sum_{z \in \Gamma \setminus \mathfrak{h}} \frac{2}{\#\Gamma_z} \text{ord}_z f + \underbrace{\text{ord}_{i\infty} f}_{=\frac{k}{12}}$

Beispiel: 6.2. $f = E_4$, in der Valenzformel stehen auf der linken Seite nur Terme ≥ 0 und rechts steht $\frac{1}{3}$, also

$$E_4(z) = 0 \iff z = \rho.$$

Analog: $f = E_6$, auf der linken Seite der Valenzformel sind aller Terme ≥ 0 , rechts steht $\frac{1}{2}$, also

$$E_6(z) = 0 \iff z = i.$$

6.4 Der Ring der Modulformen

Definition 6.6.

$$\begin{aligned} M_* &= M_*(SL(2, \mathbb{Z})) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} M_k, & M_k &\subseteq \text{Hol}(\mathfrak{h}) \\ &= \text{span} \left\{ f \mid \exists k \in \mathbb{Z} : f \in M_k \right\} \end{aligned}$$

heißt Ring der Modulformen auf Γ .

Bemerkung: M_* ist ein Ring.

- Satz 6.8.**
1. $M_k = \{0\}$ für $k < 0$
 2. $M_0 = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}_2$ (konstante Funktionen)
 3. $\dim M_k < \infty$ für $k > 0$

Beweis. 1. Anwendung der Valenzformel für ein $f \in M_k, k < 0, f \neq 0$:

$$\text{linke Seite} \geq 0 = \text{rechte Seite} < 0, \quad \text{Widerspruch}$$

2. Sei $f \in M_0, g := f - f(z_0) \cdot 1 \in M_0, z_0 \in \mathfrak{h}$, fix. Wäre $g \neq 0$, so wäre nach Valenzformel:

$$\underbrace{\text{linke Seite} > 0}_{\text{mind. } z_0 \text{ ist Nullstelle}} = \text{rechte Seite}, \quad \text{Widerspruch} \Rightarrow g = 0$$

3. Betrachte die Abbildung $\epsilon : M_k \rightarrow \mathbb{C}^n, n$ fix, $n > \frac{n}{12}$,

$$\epsilon : f \mapsto (a_f(0), a_f(1), \dots, a_f(n-1)),$$

ϵ ist ein Vektorraum Endomorphismus.

Behauptung: ϵ ist injektiv:

Sei $f \in M_k, \epsilon(f) = 0$, wäre $f \neq 0$, so folgt aus der Valenzformel:

$$\underbrace{\text{linke Seite} \geq n}_{i_\infty \text{ ist } n\text{-fache Nullstelle}} = \text{rechte Seite} = \frac{k}{12}, \quad \text{Widerspruch, also ist } \epsilon \text{ injektiv} \quad \square$$

6 Modulformen

Bemerkung: Interessant sind also nur M_k mit $k > 0$ und k gerade.

Satz 6.9.

- $E_4(z) = 0 \iff z \equiv \rho = e^{2\pi i/3} \pmod{\Gamma}$
- $E_6(z) = 0 \iff z \equiv i \pmod{\Gamma}$

Beweis. Siehe 6.2. □

Satz 6.10. $M_2 = 0$, $M_4 = \mathbb{C} \cdot E_4$, $M_6 = \mathbb{C} \cdot E_6$, $M_8 = \mathbb{C} \cdot E_4^2$, $M_{10} = \mathbb{C} \cdot E_4 \cdot E_6$

Beweis. $k = 2$: Valenzformel: Sei $f \in M_2$, wäre $f \neq 0$:

linke Seite = 0 oder $> \frac{1}{6}$ aber rechte Seite = $\frac{1}{6}$, Widerspruch

$k = 4$: $f \in M_4$, $g := f - f(i\infty) \cdot E_4$ hat Nullstellen bei $i\infty$ und ρ . Wäre $g \neq 0$, so wäre nach Valenzformel:

linke Seite $\geq \frac{4}{3} = \frac{1}{3} =$ rechte Seite, Widerspruch

$k = 6$: analog wie $k = 4$, nur mit i statt ρ

$k = 8$: ist $g \in M_8$, $g \neq 0$, so ist nach Valenzformel:

rechte Seite = $\frac{2}{3}$, also $\text{ord}_\rho g = 2$, damit analog zu $k = 4$

$k = 10$: sei $g \in M_{10}$, $g \neq 0$, dann folgt mit der Valenzformel:

rechte Seite = $\frac{5}{6}$, also einzige Möglichkeit: linke Seite = $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \text{ord}_g i = \text{ord}_{g\rho} = 1$, analog zu $k = 4$. □

Satz 6.11. $M_k (k \geq 4) = S_k \oplus \mathbb{C}E_k$

(klar nach Def. von S_k)

Bemerkung:

- $\dim M_8 = 1$, also $E_8 = E_4^2$

$$E_4^2 = 1 - \frac{16}{B_8} \sum_{l=1}^{\infty} \sigma_7(l) q^l (= 1 + 240 \sum_{l=1}^{\infty} \sigma_3(l) q^l)^2$$

$$\text{D.h. } \forall l \geq 1 : c \cdot \sigma_7(l) = 480 \sigma_3(l) + 240^2 \sum_{\substack{k_1, k_2 > 0 \\ k_1 + k_2 = l}} \sigma_3(k_1) \sigma_3(k_2)$$

Modulo:

$$\forall l \geq 1 : \sum_{d|l} d^7 = \sum_{k_1+k_2=l} l \sum_{d|k_1} d^3 + \sum_{d|k_2} d^3$$

- In \mathbb{R}^8 gibt es genau ein ganzes (d.h. $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \in \mathbb{Z}$) gerades (d.h. $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \in 2\mathbb{Z}$) unimodulares (d.h. $\det(\rho_i, \rho_j)_{1 \leq i, j \leq 8} = 1 \Rightarrow \rho_1, \dots, \rho_8$ ist Basis des Gitters) Gitter, dieses heißt E_8

$$\Theta_{E_8} := \sum_{l=8}^{\infty} \# \left\{ \gamma \in E_8 \mid \gamma \cdot \gamma = 2l \right\} q^l$$

Satz 6.12. $\Theta_{E_8} \in M_8$
(Beweis später)

Folgerung: $\Theta_{E_8} = E_4$, d.h. $\#\{\gamma \in E_8 \mid \gamma \cdot \gamma = 2l, l \geq 1\} = 240\sigma_3(l)$

Satz 6.13. Die Formen $E_4^a \cdot E_6^b$ mit $a, b \geq 0, 4a + 6b = k$ bilden eine Basis für M_k .

Lemma 6.2. $\Delta = \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728} = q + O(q^2)$ hat keine Nullstellen in \mathfrak{h} .

Beweis. Valenzformel: rechte Seite = 1, aber $\text{ord}_{i_\infty} \Delta = 1$, also keine weiteren Nullstellen. \square

des Satzes. Wir zeigen: jedes $f \in M_k$ schreibt sich als Polynom in E_4, E_6 (*). Das folgt durch Induktion über k . Wir benutzen

$$\cdot \times \Delta : M_k \longrightarrow S_{k+12},$$

(Multiplikation mit Δ) ist ein Vektorraum Isomorphismus. (Folgt aus dem Lemma.)

Die Behauptung (*) ist ok für $k = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ (siehe Satz 6.10).

Induktionsannahme: Die Behauptung ist ok für M_l mit $l < k$. Sei $f \in M_k$, dann ist $g := f - a_f(0)A_4^a E_6^b$ eine Spitzenform in S_k , wo $4a + 6b = k$ (Existenz solcher a, b siehe unten).

Also $\frac{g}{\Delta} \in M_{k-12}$. Nach Induktionsannahme ist $\frac{g}{\Delta}$ ein Polynom in E_4, E_6 , damit ist

$$f = a_f(\cdot)E_4^a E_6^b + \underbrace{\Delta}_{\frac{E_4^3 - E_6^2}{1728}} \cdot \text{Polynom in } E_4, E_6 \quad \square$$

Satz 6.14. E_4, E_6 sind algebraisch unabhängig über \mathbb{C} , (d.h. es gibt kein Polynom $p \in \mathbb{C}[X, Y]$ mit $p \neq 0$, so dass $p(E_4, E_6) \equiv 0$ ist).

Insbesondere sind die Formen $E_4^a \cdot E_6^b$ (mit $4a + 6b = k$ und $a, b \geq 0$) linear unabhängig über \mathbb{C} .

Folgerung: Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[X, Y] &\longrightarrow M_* \\ p &\longmapsto p(E_4, E_6) \end{aligned}$$

ist eine Ring-Isomorphismus.

(Kern = $\{0\}$ nach vorigem Satz, Surjektivität nach dem Satz 6.13)

Insbesondere

$$M_k = \left\{ p(E_4, E_6) \mid p = \sum * X^a Y^b, 4a + 6b = k \right\},$$

denn $\mathbb{C}[X, Y]$ ist ein graduierter Ring $\mathbb{C}[X, Y] = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbb{C}[X, Y]_{(k)}$, wo $\mathbb{C}[X, Y]_{(k)}$ = Unterraum der homogenen Polynome vom Grad k ist, wobei die Graduierung so gewählt wurde, dass $\text{deg}(X) = 4, \text{deg}(Y) = 6$ ist.

6 Modulformen

Beweis. Annahme: Es existiert ein $p \in \mathbb{C}[X, Y], p \neq 0$ mit $p(E_4, E_6) \equiv 0$, o.B.d.A habe p minimalen Grad ($\Rightarrow XY \nmid p$).

$$\text{Schreibe } p = \sum_{r,s} p_{r,s} X^r Y^s = \sum_{k \geq 0} \underbrace{\sum_{\substack{r,s \\ 4r+6s=k}} p_{r,s} X^r Y^s}_{:=p(k)}$$

Dann ist schon $p_{(k)}(E_4, E_6) = 0 \Rightarrow p = p_{(k_0)}$ für ein geeignetes k_0 . Denn $0 = p(E_4(Az), E_6(Az)) = \sum_{k \geq 0} p_{(k)}(E_4(z), E_6(z)) (cz + d)^{-k}$ (da ja $p_{(k)}(E_4, E_6) \in M_k$).

Für $d \rightarrow \infty$ folgt $p_{(k)}(E_4, E_6) \rightarrow 0$, betrachte nämlich die rechte Seite bei fixem z und fixem c als Polynom in d . Dieses Polynom hat unendlich viele Nullstellen d :

$$A = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \leftarrow A \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & -* \\ c & c + dx \end{pmatrix}$$

$$\text{Schreibe } p = p_{(k_0)} = c_1 E_4^{k_0/4} + \sum_{\substack{4r+6s=k_0 \\ r,s > 0}} c_{r,s} E_4^r E_6^s + c_2 E_6^{k_0/6}.$$

Wegen der Minimalität der Grade von $p_{(k_0)}$ folgt $c_1 \neq 0$ oder $c_2 \neq 0$. Für $z = i, \rho$ folgt $c_1 E_4^{k_0/4} + c_2 E_6^{k_0/6}$ hat $z = \rho, i$ als Nullstellen. Widerspruch! \square

Lemma 6.3. Sei k gerade, dann gilt

$$\# \left\{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, 4a + 6b = k \right\} = \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + \delta(k \not\equiv 2 \pmod{12}).$$

Bemerkung: $\# \left\{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, 4a + 6b = k \right\} > 0$ für $k \geq 0$, k gerade und $k \neq 2$

Satz 6.15. Es ist $\dim M_k = \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + \delta(k \not\equiv 2 \pmod{12})$.

Beispiel: 6.3. M_4, M_6, M_8, M_{10} sind eindimensional, Basiselemente sind E_k ($\Rightarrow E_8 = E_4^2, E_{10} = E_4 E_6$).

k	12	14	16	18	20	22	24
Basis von M_k	E_4^3, E_6^2	$E_4^2 E_6$	$E_4^4, E_4 E_6^2$	$E_4^3 E_6, E_6^3$	$E_4^5, E_6^2 E_4^2$	$E_4^4 E_6, E_4 E_6^3$	$E_4^6, E_4^3 E_6^2, E_6^4$

$M_k = \mathbb{C}E_k + S_k, S_k = \Delta \cdot M_{k-12}$, Spitzenformen sind stets Polynome in E_4, E_6, Δ .

Bemerkung: Diese Basiselemente haben ganzzahlige Fourierkoeffizienten.

Beweis. (des Lemmas) Induktion über k : für $k \leq 10$ stimmt die Behauptung. (Nachrechnen!) Induktionsannahme: die Behauptung stimme für l gerade und $l < k$.

$$a(k) = \# \left\{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, 4a + 6b = k \right\}$$

$$\text{Es gilt } a(k) = a(k - 12) + 1$$

Denn die Abbildung $\{(a, b) \mid 4a + 6b = k - 12\} \rightarrow \{(a, b) \mid 4a + 6b = k\}$, mit $(a, b) \mapsto (a, b + 2)$ ist injektiv, es fehlt im Bild (a, b) mit $4a + 6b = k$ und $b = 0$ oder $b = 1$, also $2a + 3b = \frac{k}{2}$. Es gibt genau eine Lösung die fehlt, wähle b mit $\frac{k}{2} - 2a \equiv 3b \pmod{2}$, dann ist $a = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{2} - 3a \right)$.

$$\begin{aligned} \text{Also } a(k) &= a(k - 12) + 1 \\ &\stackrel{\text{i.A.}}{=} \left\lfloor \frac{k - 12}{12} \right\rfloor + \delta(k - 12 \not\equiv 2 \pmod{12}) + 1 \\ &= \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + \delta(k \not\equiv 2 \pmod{12}) \quad \square \end{aligned}$$

6.5 Ergänzungen

Lemma 6.4. *Sei f holomorph auf \mathfrak{h} , periodisch mit Periode 1, $f = 1 + O(q)$, dann existieren Zahlen $a(n)$, so dass $f = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{a(n)}$ ist (logarithmische Ableitung anwenden).*

Satz 6.16. (ohne Beweis)

$$\Delta \left(= \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728} \right) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}$$

Bemerkung: Es gilt $\Delta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)q^n$. Dabei ist $\tau(n)$ die **Ramanujan τ -Funktion**. Die Lehmer Vermutung besagt $\tau(n) \neq 0 \forall n$.

Definition 6.7. $\eta(z) := q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$ heißt **Dedekindsche η Funktion** ($\eta^{24} = \Delta$).

Satz 6.17. (Folgerung aus dem vorigen Satz)

$$\eta(Az) = (cz + d)^{1/2} \epsilon(A) \eta(z), \quad \epsilon(A) = \mu_{24}(\text{24. Einheitswurzeln})$$

(dabei wird als Wert der Wurzel, der Wert rechts der imaginären Achse genommen)

Bemerkung:

- η ist eine Modulform vom Gewicht $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{\eta} = q^{-1/24} \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)} = q^{-1/24} \sum_{l=0}^{\infty} p(l)q^l$. Dabei ist $p(l)$ die Anzahl der Möglichkeiten l als Summe $l = l_1 + \dots + l_r$ mit $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_r$ zu schreiben (Partitionszahl).

Satz 6.18. Es ist $\frac{1}{2\pi i} \frac{\Delta'}{\Delta} = E_2$.

6 Modulformen

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \frac{\Delta'}{\Delta} &= 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^n} = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{l \geq 1} q^{nl} \\ &= 1 - 24 \sum_{k=1}^{\infty} q^k \sum_{n|k} n = E_2 \end{aligned} \quad \square$$

Folgerung: Sei $A \in SL(2, \mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} E_2(Az) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\Delta'(Az)}{\Delta(Az)} \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \Delta(Az) (cz+d)^2 \\ &= \frac{1}{2\pi i} (cz+d)^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{\Delta(z)(cz+d)^{12}}{\Delta(z)(cz+d)^{12}} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} (cz+d)^{-10} \frac{\Delta'(z)(cz+d)^{12} + A(z)(12c(cz+d))}{\Delta(z)} \\ &= E_2(z)(cz+d)^2 + \frac{6c}{\pi i} (cz+d) \\ \text{d.h. } E_2|_2 A &= E_2 + \frac{6c}{\pi i} \frac{1}{(cz+d)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Im z} |_2 A &= \frac{1}{\Im(Az)} \frac{1}{(cz+d)^2} = \frac{|cz+d|^2}{\Im(Az)} \frac{1}{(cz+d)^2} \\ &= \frac{c\bar{z}+d}{cz+d} = \frac{1}{\Im z} - \frac{2ic}{cz+d} \\ \left(\frac{2i}{z-\bar{z}} - \frac{2ic}{cz+d} = 2i(cz+d) - c(z-\bar{z}) \right) \end{aligned}$$

Satz 6.19. Sei $E_2^*(z) = E_2(z) + \frac{3}{\pi \Im(z)}$, dann gilt

$$E_2^*|_2 A = E_2^* \quad \text{für } A \in SL(2, \mathbb{Z})$$

6.6 Der Körper der Modulformen

Zur Erinnerung:

$$K(\Gamma) = \left\{ f : \mathfrak{h} \text{ meromorph} \mid \begin{array}{l} i) \quad f(Az) = f(z) \forall A \in SL(2, \mathbb{Z}) \\ ii) \quad f \text{ besitzt eine Fourierentwicklung der Gestalt} \\ \quad \quad f(z) = \sum_{n \geq -N} a_f(n) e^{2\pi i n z} \end{array} \right\}$$

$$j = \frac{E_4^3 1728}{E_4^3 - E_6^2} = q^{-1} + 744 + O(q), \quad j\text{-Invariante, } j \in K(\Gamma)$$

Satz 6.20. 1. j hat genau eine Nullstelle bei $z = e^{2\pi i/3} (= \rho)$ und genau eine Polstelle bei $i\infty$. Es gilt $j(i) = 1728$.

2. j faktorisiert zu einer Bijektion:

$$\bar{j} : SL(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{h} \cup \{i\infty\} \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$$

Beweis. (1.) ist klar, zu (2.): Sei $\gamma \in \mathbb{C}$, dann ist zu zeigen: $(j - \gamma) = 0$ hat genau eine Lösung in dem Fundamentalbereich F : Anwendung der Valenzformel auf $(j - \gamma)$:

$$\sum_{\substack{z_0 \in F \\ z_0 \neq \rho, i}} \text{ord}_{z_0}(j - \gamma) + \frac{1}{2} \text{ord}_i(j - \gamma) + \frac{1}{3} \text{ord}_\rho(j - \gamma) = 1$$

Die einzigsten Möglichkeiten sind

$\sum \text{ord}_{z_0}$	ord_i	ord_ρ	
1	0	0	, also jeweils genau eine Nullstelle in F . □
0	2	0	
0	0	3	

Satz 6.21. Es ist $K(\Gamma) = \mathbb{C}(j)$, d.h. jede Modulfunktion auf $SL(2, \mathbb{Z})$ ist eine rationale Funktion in j .

Beweis. Sei $f \in K(\Gamma)$, $f \neq \text{const}$, seien a_1, \dots, a_r die paarweise verschiedenen Nullstellen und Polstellen von f , ohne Vielfachheiten aufgezählt, die von i und ρ verschieden sind.

$$\text{Setze } g := \prod_{p=1}^r (j - j(a_p))^{\text{ord}_{a_p} f} \cdot (j - j(i))^{\text{ord}_i f/2} \cdot (j - j(\rho))^{\text{ord}_\rho f/3}$$

(Beachte die Exponenten sind aus \mathbb{Z} , nach Valenzformel)

Nach Valenzformel gilt: $\text{ord}_{i\infty} g = \text{ord}_{i\infty} f$, (denn f, g haben die gleichen Null- und Polstellen mit den gleichen Vielfachheiten).

Also ist $\frac{f}{g}$ holomorph in D als auch in $i\infty$, d.h. $\frac{f}{g} \in M_0$, also = const nach früherem Satz. □

Bemerkung: Betrachtet man den Körper der Modulfunktionen auf $\Gamma_0(l)$, $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ und er heiße etwa $K(\Gamma_0(l))$, dann gilt:

$$\exists J : K(\Gamma_0(l)) = \mathbb{C}(J) \iff l \text{ teilt } \text{«} \text{Ordnung der Monstergruppe} \text{»}$$

Satz 6.22. Sei $A, B \in \mathbb{C}$, so dass $4x^3 + Ax + B$ keine mehrfachen Nullstellen hat. Dann existiert ein $\tau \in F$ und ein $\alpha \in \mathbb{C}^*$, so dass

$$4x^3 + Ax + B = 4x^3 - \left(\pi^4 \frac{4}{3} E_4(\tau) \alpha^{-4} \right) x - \left(\pi^6 \frac{8}{27} E_6(\tau) \alpha^{-6} \right). \quad (*)$$

Bemerkung:

1. $\wp(z) := \wp(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}, z)$, dann

$$\mathbb{C}/\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{bijektiv}} \left\{ (x, y) \mid y^2 = 4x^3 - \left(\pi^4 \frac{4}{3} E_4(\tau)\right) x - \left(\pi^6 \frac{8}{27} E_6(\tau)\right) \right\} \cup [0 : 1 : 0]$$

$$z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$$

2. Folgerung aus Satz und Erinnerung: Zu A, B wie im Satz existiert ein Gitter L (nämlich $L = \alpha(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$), so dass

$$\mathbb{C}/L \longrightarrow \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = (*) \right\} \cup [0 : 1 : 0]$$

$$z \mapsto (\wp(z, L), \wp'(z, L))$$

eine Bijektion ist.

Beispiel: 6.4.

$$y^2 = 4x^3 + x \quad \longleftrightarrow \quad L = \alpha(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = \alpha\mathbb{Z}[i]$$

$$y^2 = 4x^3 + 1 \quad \longleftrightarrow \quad L = \alpha(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}) = \tilde{\alpha}\mathbb{Z}[\rho]$$

Folgerung: $\overline{\mathbb{C}}/L \stackrel{\text{Riem. Fläche}}{\approx} \overline{\mathbb{C}}/L' \iff j(L) = j(L')$ (Dabei ist $j(L) := j(\frac{\omega_1}{\omega_2})$ für $L = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$, mit $\Im(\frac{\omega_1}{\omega_2}) > 0$.)

Lemma 6.5. Seien $a, b \in \mathbb{C}$, so dass $a^3 + 27b^2 \neq 0$,

$$\exists \gamma : A = \gamma^4 a, B = \gamma^6 b \quad \text{äquivalent zu} \quad \frac{A^3}{A^3 + 27B^2} = \frac{a^3}{a^3 + 27b^2}$$

(Beachte Diskriminante $(x^3 + \frac{A}{4}x + \frac{B}{4}) = -\frac{1}{16}(A^3 + 27B^2) \neq 0$ nach Voraussetzung)

des Lemmas. \Rightarrow : Einsetzen und Nachrechnen

\Leftarrow : Identität ist äquivalent zu $B^2 a^3 = A^3 b^2$, d.h. $(\frac{A}{a})^3 = (\frac{B}{b})^2$, falls $a, b \neq 0$ (sonst leichte Übung). Setze $\gamma := (\frac{A}{a})^{1/4}$ (eine Wurzel wählen), dann $(\frac{B}{b})^2 = \gamma^{12}$, d.h. $\frac{B}{b} = \pm \gamma^6$ falls positiv: ok, sonst ersetze γ durch $i\gamma$. \square

des Satzes. Gesucht sind τ, α mit

$$A = -\pi^4 \frac{4}{3} E_4(\tau) \alpha^{-4} \qquad B = -\pi^6 \frac{8}{27} E_6(\tau) \alpha^{-6}$$

$$= -\gamma^4 E_4(\tau) \qquad = \gamma^6 \frac{E_6(\tau)}{\sqrt{27}}$$

und $\gamma = \pi i \alpha^{-1} \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4}$

Jetzt wird das Lemma angewendet: Für $\tau \in \mathfrak{h}$ ist

$$(-E_4(\tau))^3 + 27 \left(\frac{E_6(\tau)}{\sqrt{27}} \right)^2 = - \left(E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2 \right) = 1728\Delta(\tau) \neq 0$$

Also suchen wir τ mit

$$\frac{A^3}{A^3 + 27B^2} = \frac{E_4(\tau)^3}{-1728\Delta(\tau)} = \frac{j(\tau)}{(1728)^2}$$

solch $\tau \in F$ existiert nach dem Satz 6.20. \square

6.7 Thetareihen

Sei $L \subseteq \mathbb{R}^n$ ein (vollständiges) Gitter in \mathbb{R}^n (d.h. $L = \mathbb{Z}a_1 + \dots + \mathbb{Z}a_n$, a_1, \dots, a_n \mathbb{R} -Basis des \mathbb{R}^n) und \cdot sei das gewöhnliche Skalarprodukt: $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$

Definition 6.8. Das zu L **duale Gitter** L^* sei

$$L^* := \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in L : x \cdot y \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Lemma 6.6. L^* ist vollständiges Gitter.

Beweis. Sei a_1^*, \dots, a_n^* die zu a_1, \dots, a_n duale Basis, dann ist $a_i \cdot a_j = \delta_{i,j}$. Existenz:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \text{ dann ist } (A^{-1})^t = \begin{bmatrix} a_1^* \\ \vdots \\ a_n^* \end{bmatrix} \text{ und dann ist } L^* = \mathbb{Z}a_1^* + \dots + \mathbb{Z}a_n^*. \quad \square$$

Definition 6.9.

$$\Theta_L(z) := \sum_{x \in L} e^{\pi i z x^2} \quad (\text{d.h. } \Theta_L = \sum_{x \in L} q^{x^2/2})$$

heißt **Thetareihe** zu L .

Lemma 6.7. Die Reihe konvergiert absolut gleichmäßig auf jeder Teilmenge von \mathfrak{h} , der Gestalt $\Im z \geq R > 0$. Insbesondere ist Θ_L holomorph in \mathfrak{h} .

Beweis. $x = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n \in \mathbb{R}^n$, dann

$$x \cdot x = \sum_{i,j} x_i a_i a_j x_j \\ \xi \underbrace{(a_i \cdot a_j)_{1 \leq i,j \leq n}}_{=G} \xi^t$$

Mit einer Gram-Matrix G zur Basis a_1, \dots, a_n und $\xi = (x_1, \dots, x_n)$ Sei $\lambda := \min_{\xi^2=1} \xi G \xi^t$, es gilt $\lambda > 0$.

6 Modulformen

Es gilt $\xi G \xi^t = \frac{\xi}{|\xi|} G \left(\frac{\xi}{|\xi|} \right)^t |\xi|^2 \geq \lambda \xi^2, \xi \neq 0, \xi \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \sum_{x \in L} |e^{\pi i z x^2}| &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |e^{\pi i z \xi G \xi^t}| = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{-\pi R \lambda \xi^2} \\ &= \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} e^{-\pi R \lambda p^2} \right)^n = \left(2 \sum_{p=0}^{\infty} e^{-\pi R \lambda p} \right)^n < \infty, \end{aligned}$$

da $e^{-\pi R \lambda} < 1$. □

Definition 6.10.

$$v(L) := \left| \det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right|$$

heißt das **Volumen von L** .

Lemma 6.8. $v(L)$ hängt nicht von der speziellen Wahl der a_1, \dots, a_n ab.

Beweis. Ist $L = \mathbb{Z}b_1 + \dots + \mathbb{Z}b_n$, dann ist

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

wobei $T \in GL(n, \mathbb{Z})$ ist. Wegen $\det T = \pm 1$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung:

$$v(L) = \int_{\{x_1 a_1 + \dots + x_n a_n \mid 0 \leq x_1, \dots, x_n \leq 1\}} dx$$

Poissonsche Summenformel

Sei f eine Funktion mit »guten« Eigenschaften auf \mathbb{R}^n , dann gilt

$$\sum_{x \in L} f(x) = \frac{1}{v(L)} \sum_{y \in L^*} \hat{f}(y),$$

dabei ist $\hat{f} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot y} dx$ (die Fourier Transformierte).

Bemerkung: $\frac{1}{v(L)} = \frac{1}{v(L)^{1/2}} v(L^*)^{1/2}$, damit wird die Formel symmetrischer. Dies wird angewendet auf $g(x) = e^{-\pi t x^2}$ ($x \in \mathbb{R}^n, x \cdot x = x^2, t \in \mathbb{R}_{>0}$)

Lemma 6.9. $\hat{g}(y) = \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\pi \frac{1}{t} y^2}$

Beweis.

$$\begin{aligned}\hat{g}(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi t x^2} e^{-2\pi i x \cdot y} dx \\ (\text{quadrat. Ergänzung}) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi t(x+iy/t)^2} dx e^{-\pi \frac{1}{t} y^2} \\ &= \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t(u+iv/t)^2} du \right)^n} \\ \text{Es ist } \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t(u+iv/t)^2} du &= \int_{\Im z = \frac{v}{t}} e^{-\pi t z^2} dz \stackrel{\text{Int.-weg verschieben}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t z^2} dz \\ &= t^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi^{-1}} \Gamma(\frac{1}{2})}{t^{1/2}} \quad \square\end{aligned}$$

Satz 6.23.

$$\Theta_L(z) = \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{z}{i}}\right)^n v(L)} \Theta_{L^*}\left(-\frac{1}{z}\right)$$

(Dabei wird die Wurzel stets so gewählt, dass $\Re z > 0$ bzw. z auf der imaginären Achse liegt.)

Beweis. Beide Seiten sind holomorph in $z \in \mathfrak{h}$, also genügt es die Behauptung für $z = it, t > 0$ zu beweisen (Identitätssatz). Für $z = it$:

$$\begin{aligned}\Theta_L(z) &= \sum_{x \in L} e^{-\pi t x^2} = \sum_{x \in L} g(x) \\ \text{rechte Seite} &= \sum_{y \in L^*} \underbrace{\frac{1}{t^{n/2}} e^{-\pi/t y^2}}_{=\hat{g}(y)} \quad \square\end{aligned}$$

Satz 6.24. Sei L ganz (d.h. $\forall x, y \in L : x \cdot y \in \mathbb{Z}$) gerade (d.h. $\forall x \in L : x^2 \in 2\mathbb{Z}$) und unimodular (d.h. $\left| \det \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right| = 1 \Rightarrow L^* = L$) $n \equiv 0 \pmod{8}$ (ohne Beweis).

Satz 6.25. $\Theta_L \in M_{\frac{n}{2}}(SL(2, \mathbb{Z}))$.

Beweis. Nach vorhergehendem Satz gilt:

$$\begin{aligned}\Theta_L(z) &= z^{-n/2} \Theta_L\left(-\frac{1}{z}\right), \text{ d.h. } \Theta_L|_{n/2} S = \Theta_L \\ \text{Ferner: } \Theta_L &= \sum_{x \in L} q^{x^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \# \{x \in L \mid x^2 = 2n\} q^n, \\ \text{daher } \Theta_L|_{n/2} T &= \Theta_L \text{ und holomorph bei } i\infty \quad \square\end{aligned}$$

Definition 6.11. L, L' heißen isomorph, falls $L = \sigma(L')$ für eine Isometrie σ des \mathbb{R}^n ($\sigma \in O(n, \mathbb{R})$)

6 Modulformen

Satz 6.26 (»Minkowski-Siegel Mass Formula«). *Die Anzahl der Isomorphieklassen der ganzen geraden unimodularen Gitter in \mathbb{R}^n ist endlich. Es gilt*

$$\sum_{\substack{L \text{ ganz, gerade unimod. in } \mathbb{R}^n \\ \text{modulo Isomorphie}}} \frac{1}{|\text{Aut}(L)|} = 2^{1-n} \frac{|B_{n/2}|}{(n/2)!} \prod_{j=1}^{n/2-1} |B_{2j}|$$

Bemerkung: Diese Anzahl wächst sehr schnell:

n	8	16	24	32
	1	2	24	ca. 80 Mio.

Das (bis auf Isomorphie einzigste) ganze gerade unimodulare Gitter in Dimension 8 heißt E_8 .

Folgerung: $\Theta_{E_8} \in M_4$ daher $\Theta_{E_8} = E_4$.

$$\#\{x \in E_8 \mid x^2 = 2n\} = 240 \sum_{d|n} d^3 \quad (n > 0)$$

Konstruktion von E_8 :

Die Projektive Ebene über \mathbb{F}_2 : $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2) = (\mathbb{F}_2^3 \setminus \{(0,0,0)\}) / \mathbb{F}_2^*$ hat 7 Punkte und 7 Geraden, jede Gerade hat 3 Punkte und jeder Punkt liegt auf genau 3 Geraden (siehe Abbildung 6.3).

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2))$ ist eine Gruppe bzgl. symmetrische Differenz $A + B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Definiere $H_7 :=$ Menge aller Geraden \cup Menge aller Komplemente von Geraden $\cup \{\emptyset, \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)\}$. $\#H_7 = 2^4$

Als Übung: H_7 ist Untergruppe von $\mathcal{P}(\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2))$.

Identifiziere Teilmengen A von $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ mit Vektoren in \mathbb{F}_2^7 , dazu werden die Punkte P_1, \dots, P_7 nummeriert und eine Zuordnung, vermöge

$$A \mapsto \begin{cases} \text{Vektor hat 1 an Stelle, } i & \text{falls } P_i \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

getroffen. Damit wird H_7 zu einem Untervektorraum von \mathbb{F}_2^7 .

Setze $H_8 := \{(x, x_1 + \dots + x_7) \in \mathbb{F}_2^8 \mid x = (x_1, \dots, x_7) \in H_7\} \subseteq \mathbb{F}_2^8$ (**Hamming Code** der Länge 8)

Übung: H_8 ist selbstdual (d.h. $H^\perp = H$) und doppelt gerade (d.h. jedes $x \in H_8$ hat genau 0, 4 oder 8 Einsen).

Definition 6.12. $E_8 := \frac{1}{\sqrt{2}} \{x \in \mathbb{Z}^8 \mid x \bmod 2 \in H_8\}$

Übung: E_8 ist ein Gitter und hat folgende weitere Eigenschaften:

- gerade ($x^2 = \frac{1}{2} \sum x_i^2 \cdot \sum x_i^2 \equiv 0 \pmod{4}$, da H_8 doppelt gerade ist)
- ganz ($x \cdot y = \frac{1}{2}(x+y)^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$)
- unimodular (weil H^\perp selbstdual ist)

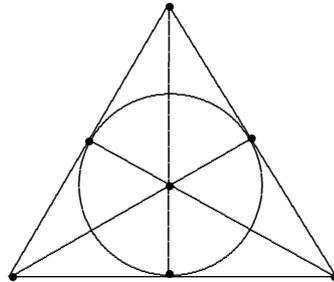


Abbildung 6.3: Die Projektive Ebene mit 7 Punkten, der Kreis ist die siebte Gerade.



Ende!

Symbolverzeichnis

- Γ , 15
- σ -Funktion, 11
- Az , 29
- $\overline{\mathbb{C}}$, 21
- D_∞ , 4
- D_f , 3
- $Div(\overline{\mathbb{C}})$, 24
- $Div_0(\overline{\mathbb{C}})$, 24
- E , 52
- E_Γ , 52
- S^1 , 31
- $[z, a, b, c]$, 29
- $Aut(\mathbb{C})$, 25
- $Aut(\overline{\mathbb{C}})$, 27
- $Aut(\overline{\mathbb{C}})_\infty$, 28
- $Aut(\mathfrak{h})$, 29
- $GL(2, \mathbb{C})$, 27
- $GL(2, \mathbb{R})$, 30
- $Hol(\mathbb{C})$, 2
- $Mer(U)$, 23
- $\Theta(\Gamma)$, 43
- $\Theta(\Gamma)_{triv}$, 43
- \mathcal{D} , 3
- \mathbb{D} , 29
- $Mer(\mathbb{C})$, 2
- B_n , 63
- $Div(\mathbb{C}/\Gamma)$, 40
- E_4 , 71
- E_6 , 71
- E_{2k} , 65
- $Ell(\Gamma)$, 39
- L^* , 83
- M_* , 75
- $P(\mathbb{C}/\Gamma)$, 40
- $Pic_0(\mathbb{C}/\Gamma)$, 47
- $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$, 51
- Δ , 57, 71
- $\Gamma \sim \Delta$, 60
- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, 50
- Θ_L , 83
- Θ_{E_8} , 76
- $\deg(f)$, 49
- $\sigma_1(n)$, 63
- $\sigma_r(n)$, 65
- (ω) , 44
- $\tilde{P}(\mathbb{C}/\Gamma)$, 44
- $\wp(\tau, z)$, 61
- $\zeta(s)$, 65
- e_{z_0} , 48
- j , 71
- $v(L)$, 84
- $K(\Gamma)$, 71
- $M_k(\Gamma)$, 71
- $S_k(\Gamma)$, 71
- Γ_0 , 69
- $\Im z$, 11
- \mathcal{P} , 2
- $\mathcal{P}_{\neq 0}$, 2
- $\Gamma \backslash X$, 32

Index

- ähnlich, 60
- Bernoulli Zahlen, 63
- biholomorph, 27, 59
- biholomorph äquivalent, 29, 59
- diskrete Untergruppe, 11
- Diskriminante
 - eines Polynoms, 57
- Divisor, 3
 - auf \mathbb{C}/Γ , 40
 - elliptische Funktion, 39
 - meromorphe Funktion, 23
- Divisortheorie, 3
- Doppelverhältnis, 29
- Duplication Formula, 20
- Euler-Mascheronische Konstante, 15
- exakte Sequenz, 3
- Fundamentalebene von \mathfrak{h} modulo Γ , 33
- Funktion
 - Γ , 15
 - σ , 11
 - Dedekindsche η Funktion, 79
 - Ramanujan τ -Funktion, 79
- Funktionalgleichung
 - Γ -Funktion, 17
- ganz, 2
- ganz rational, 2
- Gerade
 - projektive $G.$, 53
- Gitter
 - duales $G.$, 83
 - vollständiges, 12
 - vollständiges $G.$ im \mathbb{R}^n , 83
 - Volumen eines $G.$, 84
- gleichmäßig konvergent, 1
- Grad von f , 49
- Hamming Code, 86
- Hauptdivisoren, 40
- holomorph
 - auf $\overline{\mathbb{C}}$, 22, 27
 - Funktion auf Riemannschen Flächen, 59
 - holomorph bei $i\infty$, 71
- Homöomorphismen, 22
- homogene Koordinaten, 51
- homogenes Polynom, 54
- isomorph
 - i. bei Riemannschen Flächen, 59
- Körper der elliptischen Funktionen, 39
- Karten, 22
- kompakt gleichmäßige Konvergenz, 1
- Konvergenz
 - absolute von unendlichen Produkten, 6
 - gleichmäßig, 1
 - kompakt gleichmäßige, 1
 - normale, 2
 - unendliche Produkte, 5
- Kozykel, 43
- Kozykelrelation, 43
- Möbius-Transformation, 29
- meromorph
 - auf $\overline{\mathbb{C}}$, 22
- Moduldreieck, 33, 67
- Modulform
 - meromorphe, 70
 - schwache $M.$, 69
- Modulfunktionen, 71
- Modulgruppe, 67
- normal konvergent, 2

Orbit, 32
Picard Gruppe, 47
Poissonsche Summenformel, 84
primitive Zweiteilungspunkte, 45
Produktdarstellung
 Sinus, 11
projektive Ebene über \mathbb{R} , 51
Punkte
 unendlich ferne $P.$, 51

rational, 2
Raum
 projektiver $R.$ über \mathbb{C} , 50
Riemannsches ζ -Funktion, 65
Riemannsches Fläche
 allgemeine Definition, 57

Satz
 kleine $S.$ von Picard, 26
 Lemma von Schwarz, 31
 Liouville I, 40
 Liouville II, 40
 Liouville III, 42
 Liouville IV, 45
 Mittag-Leffler, 35
 Valenzformel, 72
 Weierstraß, 26
Sequenz
 exakte, 3
Singularität
 wesentliche bei ∞ , 21
Spitzenformen, 71
Stabilisator, 28
Standgruppe, 28
Stirlingsche Formel, 20

Thetafunktionen mod Γ , 43
Thetareihe, 83
Triplication Formula, 20

Verzweigungsgrad, 48
Vielfachheit, 48

Wallis Produkt, 11
Weierstraßsche σ -Funktion, 14