Seminar über Knotentheorie – Polynomiale Invarianten: Das Jones-Polynom

Lars Fischer

08.01.2003

Inhaltsverzeichnis

1 Klammer- und Jones-Polynom **1**
1.1 Das Klammer-Polynom 1
1.2 Die Windungszahl 2
1.3 Das X-Polynom 3
1.4 Das Jones-Polynom 3

2 Eine andere Sicht auf das Klammer-Polynom **4**

3 Polynome alternierender Knoten **5**

4 Die wichtigsten Knotenpolynome im Überblick **7**
4.1 Alexander und Conway-Polynom 7
4.2 Jones und Kauffman-Polynom 7
4.3 HOMFLY-Polynom (1985) 7

1 Klammer- und Jones-Polynom

1.1 Das Klammer-Polynom

Regeln:

1. $\langle \bigcirc \rangle = 1$

2. $\begin{cases} \langle \times \rangle = A\langle)(\rangle + B\langle \asymp \rangle \\ \langle \times' \rangle = A\langle \asymp \rangle + B\langle)(\rangle \end{cases}$

3. $\langle L \cup \bigcirc \rangle = \mathrm{C}\,\langle L \rangle$

Bestimmung der Unbekannten liefert:

1. $\langle$ $\rangle = 1$

2. $\begin{cases} \langle$ $\rangle = A\langle$ $\rangle + A^{-1}\langle$ $\rangle$
 $\langle$ $\rangle = A\langle$ $\rangle + A^{-1}\langle$ $\rangle$ $\end{cases}$

3. $\langle L \cup$ $\rangle = (-A^2 - A^{-2})\langle L \rangle$

Beispiel 1 *Triviale Verschlingung*

- *von 2 Komponenten:*

$$\langle \bigcirc \cup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2})\langle \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2})$$

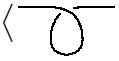
- *von n Komponenten:*

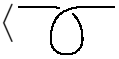
$$\langle \bigcirc \cup \ldots \cup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2})^{n-1}$$

Beispiel 2 *Hopf-Verschlingung:*

$\langle$ $\rangle = -A^4 - A^{-4}$

Auswirkung der ersten Reidemeisterbewegung :

- $\langle$  $\rangle = -A^{\mathbf{3}}\langle$ $\rangle$

- $\langle$  $\rangle = -A^{\mathbf{-3}}\langle$ $\rangle$

Das Klammer-Polynom ist keine Knoteninvariante, da es sich unter der ersten Reidemeisterbewegung ändert.

1.2 Die Windungszahl

Definition 1 *Für die Berechnung der* Windungszahl*, wird jede Kreuzung der orientierten Projektion L, entweder mit* $+1$ *oder mit* -1*, versehen:*

$= +1,$ $= -1$

Die Windungszahl $w(L)$ *ist die Summe der Zahlen in der Projektion.*

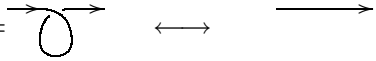
Die Windungszahl ist invariant unter der zweiten und dritten Reidemeisterbewegung, aber nicht unter der ersten!

1.3 Das X-Polynom

Definition 2 *Das X-Polynom einer Projektion L eines Knotens oder einer Verschlingung wird definiert als:*

$$X(L) = (-A^3)^{-w(L)} \langle L \rangle$$

Die Wirkung der ersten Reidemeisterbewegung:

$L' :=$  $=: L$

$$\begin{aligned} w(L') &= w(L) + 1, \\ X(L') &= (-A^3)^{-w(L')} \langle L' \rangle = (-A^3)^{-(w(L)+1)} \langle L' \rangle \\ &= (-A^3)^{-(w(L)+1)} \underbrace{(-A^3) \langle L \rangle}_{RM1 \text{auf} L'} = (-A^3)^{-w(L)} \langle L \rangle \\ &= X(L) \end{aligned}$$

(Die anderen Fälle entsprechend.)

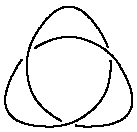
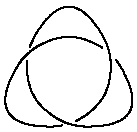
1.4 Das Jones-Polynom

Definition 3 *Das* Jones-Polynom V(L) *einer Projektion L ergibt sich aus $X(L)$, indem man A durch $t^{-\frac{1}{4}}$ ersetzt:*

$$V(L) = (-t^{-\frac{3}{4}})^{-w(L)} \langle L \rangle$$

(1984 von V. Jones veröffentlicht)

Beispiel 3 *Jones-Polynom des Kleeblattknotens und seines Spiegelbildes :*

$V\Big($  $\Big) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}, \quad V\Big($  $\Big) = -t^4 + t^3 + t$

Eigenschaften des Jones-Polynoms:

- alle Primknoten mit 10 oder weniger Kreuzungen haben unterschiedliches Jones-Polynom und sind deswegen unterschiedlich
- Das Jones-Polynom erfüllt eine eigene Flechtrelation :

mit $L_+ =$, $L_- =$ und $L_0 =$

gilt $t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(L_0)$

Offene Fragen:

- Gibt es einen nichttrivialen Knoten, dessen Jones-Polynom 1 ist?

2 Eine andere Sicht auf das Klammer-Polynom

- Etikettierung der 4 Gebiete, die an einer Kreuzung aufeinander treffen (siehe Abbildung 1)
- A-Aufspaltung, B-Aufspaltung (siehe Abbildung 2)
- ein **Z**ustand ist die Auswahl einer der beiden möglichen Aufspaltung für jede Kreuzung der Projektion

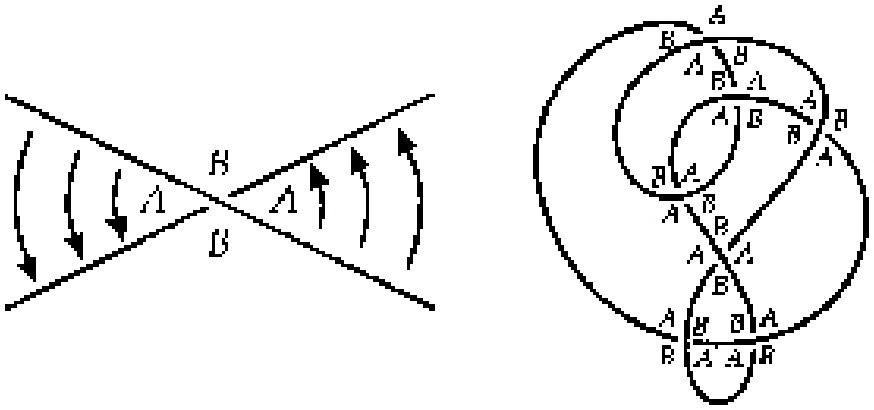


Abbildung 1: A-B Aufteilung der Kreuzungen

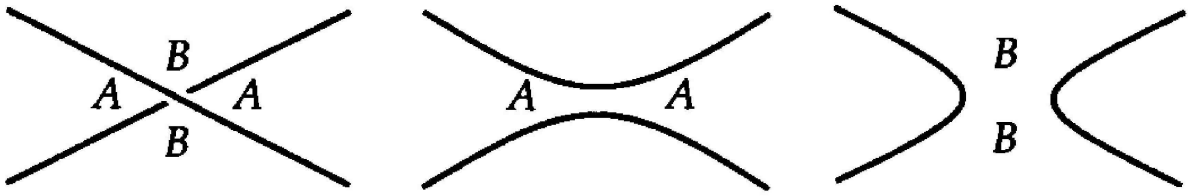


Abbildung 2: A-B Aufteilung an einer Kreuzung und A- bzw. B-Aufspaltung

Berechnung von $\langle L \rangle$:

- L habe n Kreuzungen
- Summe über alle 2^n Zustände $S_1, \ldots, S_{2^n}$, bzw. den zugehörigen $\langle L_i \rangle$
- jeder Zustand S_i bildet eine Menge sich nicht schneidender Kurven, $|S_i|$ bezeichne deren Anzahl

Aus Beispiel 1 folgt, dass das Klammer-Polynom $\langle L_i \rangle = (-A^2 - A^{-2})^{|S_i|-1}$ ist.
Faktor von $\langle L_i \rangle$: $A^{a(S_i)}A^{-b(S_i)}$. Dabei ist $a(S_i)$ bzw. $b(S_i)$ die Anzahl der A- bzw. B-Aufteilungen von S_i.
Das Klammer-Polynom $\langle L \rangle$ ergibt sich nun als Summe über alle Zustände S_i:

$$\langle L \rangle = \sum_{i=1}^{2^n} A^{a(S_i)}A^{-b(S_i)}(-A^2 - A^{-2})^{|S_i|-1}$$

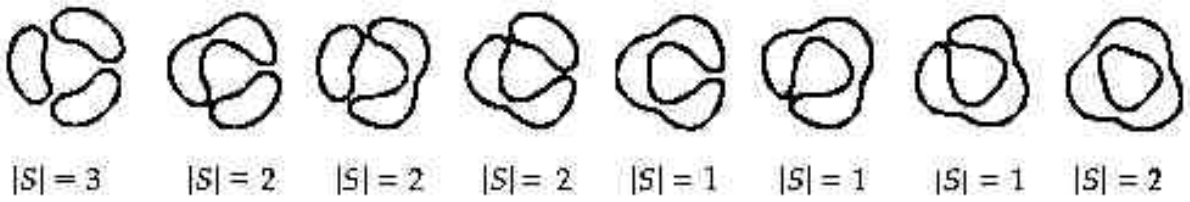


Abbildung 3: Die mgl. Zustände bei einem Kleeblattknoten

3 Polynome alternierender Knoten

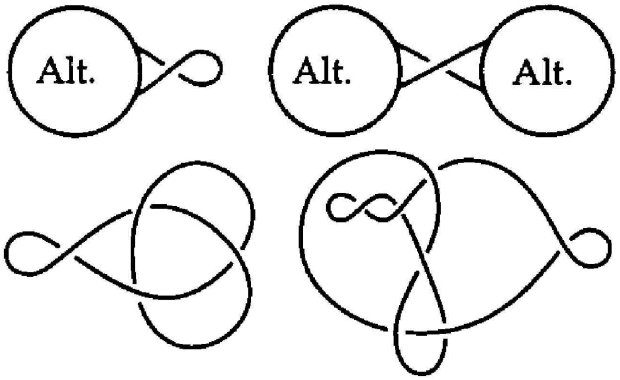


Abbildung 4: Nichtreduzierte alternierende Knotenprojektionen

Eine alternierende Knotenprojektion heißt **reduziert**, wenn es keine unnötigen Kreuzungen, wie in Abbildung 4 gibt.
Nichtreduzierte Projektionen lassen leicht vereinfachen, reduzierten Projektionen sieht man keine leichte Vereinfachung mehr an:

Vermutung 1 *Zwei reduzierte alternierende Knotenprojektionen desselben Knotens haben dieselbe Anzahl von Kreuzungen.*

Vermutung 2 *Die Anzahl der Kreuzungen einer reduzierten alternierenden Knotenprojektion ist gleich dem Minimum der Anzahl aller in irgendeiner Knotenprojektion auftretenden Kreuzungen.*

Beweis der Vermutungen: mittels der neuen Knoten-Polynome.
Folgerung: die Selbstschnittzahl eines alternierenden Knotens lässt sich an einer reduzierten Projektion ablesen.

Beweisskizze zur ersten Vermutung:

Definition 4 *Die **Höhe** des Klammer-Polynoms ist die Differenz des größten und des niedrigsten Exponenten.*

Die erste Vermutung folgt aus Hilfssatz:
Hilfssatz: Wenn K eine reduzierte alternierende Projektion mit n Kreuzungen ist, so gilt $Höhe(\langle K \rangle) = 4n$.

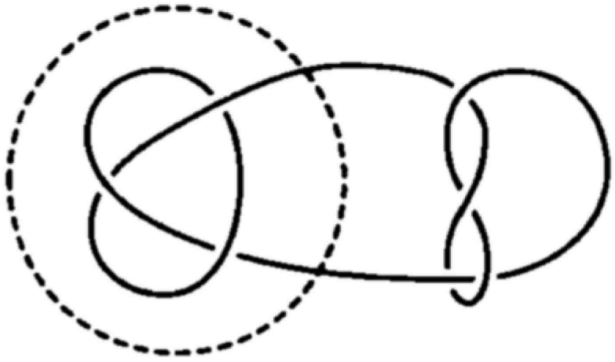


Abbildung 5: Zusammengesetzter Knoten

1983 bewies Menasco: Falls der zusammengesetzte Knoten $K_1 \# K_2$ alternierend ist, so tritt er in jeder alternierenden Projektion zusammengesetzt auf.
Mit der zweiten Vermutung und Menascos Ergebnis kann man zeigen:

Folgerung 1 *Ist $K_1 \# K_2$ ein alternierender Knoten, so gilt $c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2)$.*

Folglich gilt:

$$c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2) \tag{1}$$

Alternierende Knoten sind die erste Klasse von Knoten, für die (1) bewiesen werden konnte.

Offene Fragen

- Gibt es andere Knoten, die ihre Selbstschnittzahl in einem bestimmten Typ von Projektion annehmen?
- Gibt es weitere Klassen von Knoten für die (1) gilt?

4 Die wichtigsten Knotenpolynome im Überblick

$L_+ =$, $L_- =$, $L_0 =$

4.1 Alexander und Conway-Polynom

Alexander-Polynom (1928)

1. $\Delta($$) = 1$
2. $\Delta(L_+) - \Delta(L_-) + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta(L_0) = 0$

Conway-Polynom (1969)

Substitution $z := (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$

1. $\nabla($$) = 1$
2. $\nabla(L_+) - \nabla(L_-) + z\nabla(L_0) = 0$

4.2 Jones und Kauffman-Polynom

Kauffman-Polynom

$$X(L) = (-A^3)^{-w(L)} \langle L \rangle$$

Ersetzt man A durch $t^{-\frac{1}{4}}$ erhält man das Jones-Polynom:

Jones-Polynom (1984)

$$V(L) = (-t^{-\frac{3}{4}})^{-w(L)} \langle L \rangle$$

4.3 HOMFLY-Polynom (1985)

1. $P($$) = 1$
2. $lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0$

Bemerkungen:

- HOMFLY steht für: Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish und Yetter; weitere Entdecker: Prztycki und Traczyk

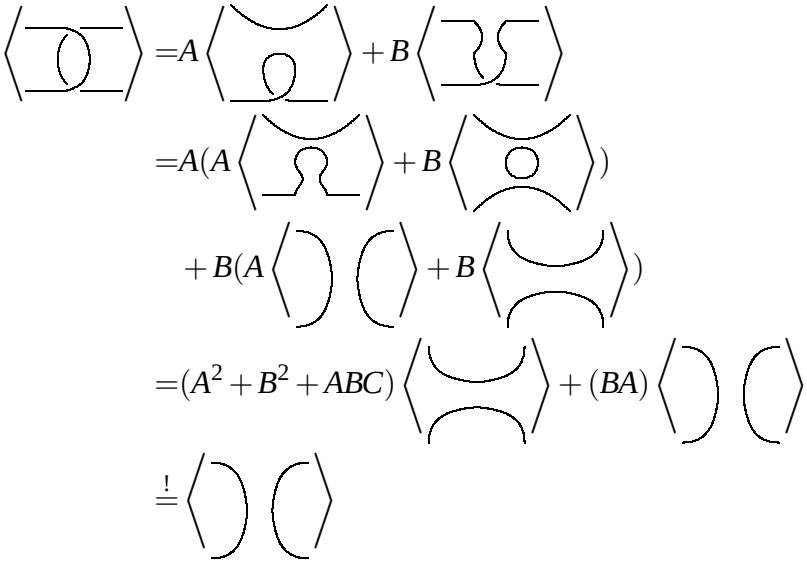
- Verallgemeinerung:
  - des Jones-Polynoms: $V(t) = P(l = it^{-1}, m = i(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}))$
  - des Alexander-Polynoms: $\Delta(t) = P(l = i, m = i(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}))$
- es gibt verschiedene Knoten mit dem gleichen HOMFLY-Polynom

Anhang

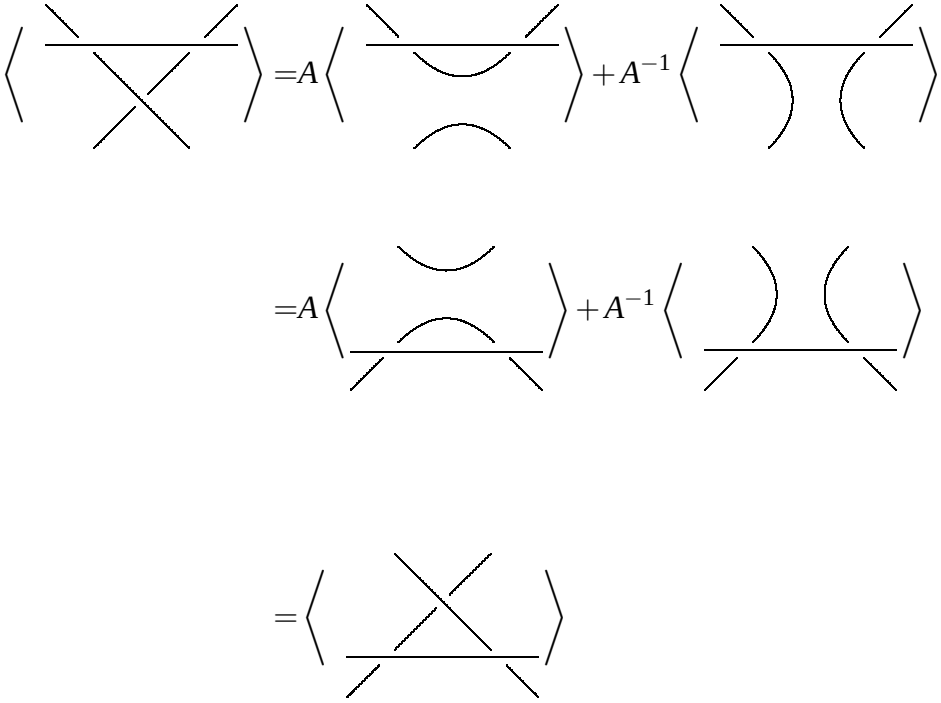
A Das Klammer-Polynom und die Reidemeister-Bewegungen

In diesem Anhang geht es um die Bestimmung der Konstanten B und C aus dem ersten Abschnitt und darum, ob das Klammer-Polynom invariant unter den Reidemeister-Bewegungen ist.

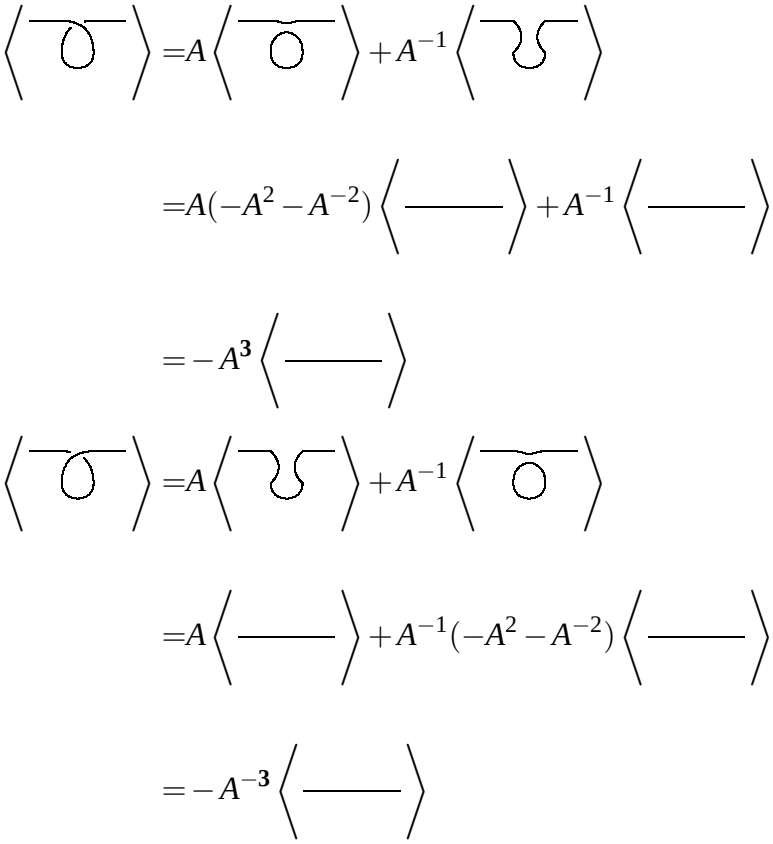
- Die zweite Reidemeisterbewegung:



- Die dritte Reidemeisterbewegung:

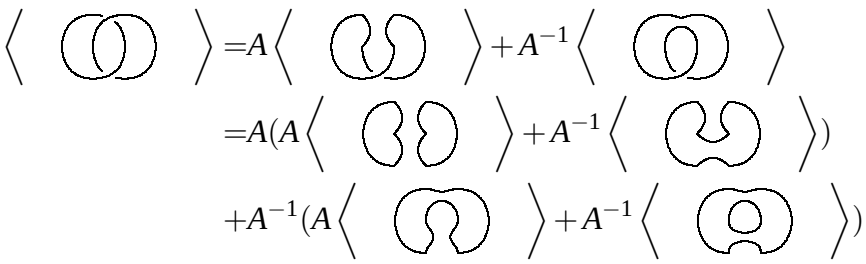


- Die erste Reidemeisterbewegung:



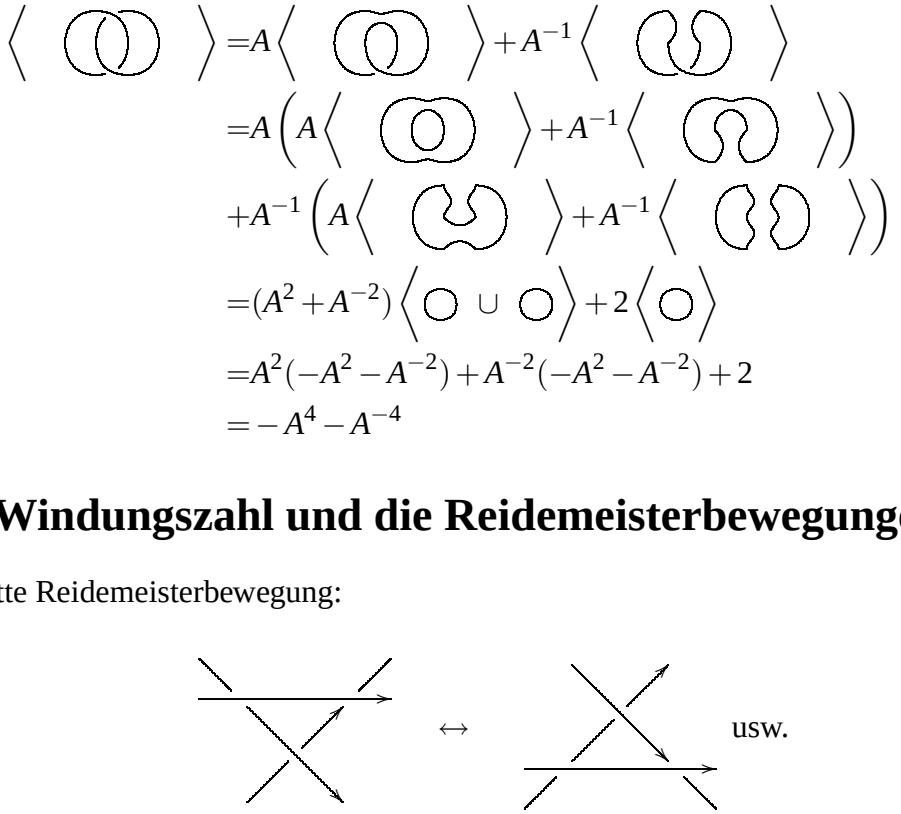
B Die Hopf-Verschlingung

Ein erstes Beispiel für die Berechnung des Klammer-Polynoms:



Im Abschnitt über den Kleeblattknoten wird auch das Klammer-Polynom des Spiegelbildes

benötigt:



C Die Windungszahl und die Reidemeisterbewegungen

- die dritte Reidemeisterbewegung:

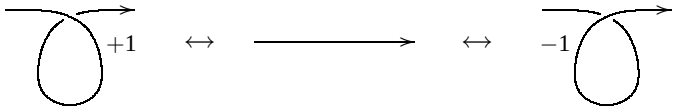
usw.

Das Verschieben von einem Strang ändert nicht den Typ der beiden betroffenen Kreuzungen, deswegen bleibt die Windungszahl gleich.

- Die zweite Reidemeisterbewegung:

Die Windungszahl ändert sich nicht.

- Die erste Reidemeisterbewegung:



Die Windungszahl ändert sich!

D Der Kleeblattknoten und sein Spiegelbild

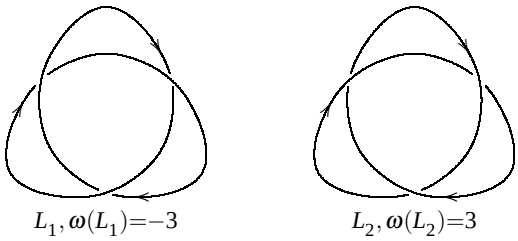
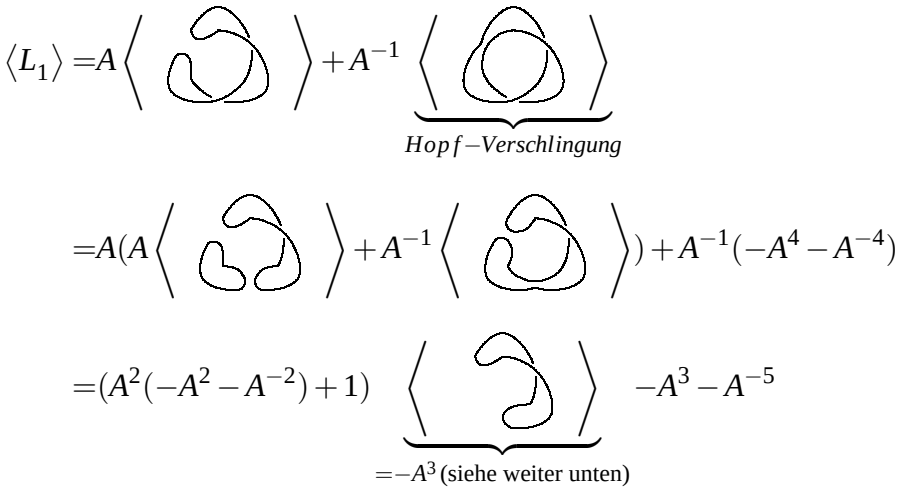


Abbildung 6: Der Kleeblattknoten und sein Spiegelbild

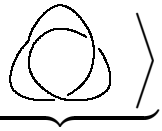
Berechnung von $X(L_1)$



Damit ergibt sich $X(L_1) = (-A^3)^{-\omega(L_1)}\langle L_1 \rangle$ zu:

$$X(L_1) = (-A^3)^{-(-3)}(A^7 - A^3 - A^{-5}) = -A^{16} + A^{12} + A^4 \Rightarrow V(L_1) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$$

Berechnung von $X(L_2)$

$\langle L_2 \rangle =A$  $+A^{-1}$

Hopf-Verschlingung

$=A(-A^4 - A^{-4}) + A^{-1}(A$ $+A^{-1}$ $)$

$=-A^{-3}$(siehe weiter unten)

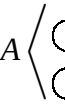
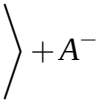
$$\begin{aligned}
&=(-A^5 - A^{-3}) - A^{-3} + A^{-2}(-A^{-2} - A^2)(-A^{-3}) \\
&=(-A^5 - A^{-3}) - A^{-3} + A^{-7} + A^{-3} \\
&= -A^5 - A^{-3} + A^{-7}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich $X(L_2) = (-A^3)^{-\omega(L_2)}\langle L_2 \rangle$ zu:

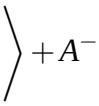
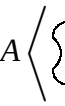
$$X(L_2) = (-A^3)^{-3}(A^{-7} - A^5 - A^{-3}) = -A^{-16} + A^{-12} + A^{-4} \Rightarrow V(L_2) = -t^4 + t^3 + t$$

Fazit Der Kleeblattknoten ist von seinem Spiegelbild verschieden!

Bei der Berechnung wurden diese beiden Zwischenergebnisse verwendet:

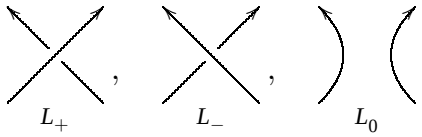
$\langle$ $\rangle =A\langle$  $\rangle +A^{-1}\langle$  $\rangle$

$=A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1} = -A^3$

$\langle$ $\rangle =A\langle$  $\rangle +A^{-1}\langle$  $\rangle$

$=A + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) = -A^{-3}$

E Die Flechtrelation des Jones-Polynoms



Berechnung der Jones-Polynome:

$$
\begin{aligned}
V(L_+) =& (-t^{-\frac{3}{4}})^{-(\omega(L_0)+1)}(t^{-\frac{1}{4}}\langle\,)\,(\,\rangle + t^{\frac{1}{4}}\langle\smile\frown\rangle)\\
V(L_-) =& (-t^{-\frac{3}{4}})^{-(\omega(L_0)-1)}(t^{-\frac{1}{4}}\langle\smile\frown\rangle + t^{\frac{1}{4}}\langle\,)\,(\,\rangle)\\
V(L_0) =& (-t^{-\frac{3}{4}})^{-\omega(L_0)}\langle\,)\,(\,\rangle
\end{aligned}
$$

Damit:

$$
t^{-1}V(L_+) = (-t^{-\frac{3}{4}})^{-\omega(L_0)-1}(t^{-\frac{5}{4}}\langle\,)\,(\,\rangle + t^{-\frac{3}{4}}\langle\smile\frown\rangle) \tag{2}
$$

$$
tV(L_-) = (-t^{-\frac{3}{4}})^{-\omega(L_0)+1}(t^{\frac{3}{4}}\langle\smile\frown\rangle + t^{\frac{5}{4}}\langle\,)\,(\,\rangle) \tag{3}
$$

(2) - (3) liefert:

$$
\begin{aligned}
&-(-1)^{-\omega(L_0)}(t^{-\frac{3}{4}})^{-\omega(L_0)}(t^{-\frac{2}{4}}\langle\,)\,(\,\rangle + t^{0}\langle\smile\frown\rangle)\\
&+(-1)^{-\omega(L_0)}(t^{-\frac{3}{4}})^{-\omega(L_0)}(t^{0}\langle\smile\frown\rangle + t^{\frac{2}{4}}\langle\,)\,(\,\rangle)\\
=&(-t^{-\frac{3}{4}})^{-\omega(L_0)}(t^{\frac{1}{2}}\langle\,)\,(\,\rangle - t^{-\frac{1}{2}}\langle\,)\,(\,\rangle)\\
=&(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\underbrace{(-t^{-\frac{3}{4}})^{-\omega(L_0)}\langle\,)\,(\,\rangle}_{=V(L_0)}
\end{aligned}
$$

Insgesamt ergibt sich für das Jones-Polynom diese Flechtrelation:

$$
t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(L_0)
$$

F Literatur

Adams, Colin C.:
Das Knotenbuch: Einführung in die mathematische Theorie der Knoten, Spektrum Akad. Verlag, 1995