

Seminar über Knotentheorie – Polynomiale Invarianten: Das Jones-Polynom

Lars Fischer

08.01.2003

Inhaltsverzeichnis

1	Klammer- und Jones-Polynom	1
1.1	Das Klammer-Polynom	1
1.2	Die Windungszahl	2
1.3	Das X-Polynom	3
1.4	Das Jones-Polynom	3
2	Eine andere Sicht auf das Klammer-Polynom	4
3	Polynome alternierender Knoten	5
4	Die wichtigsten Knotenpolynome im Überblick	8
4.1	Alexander und Conway-Polynom	8
4.2	Jones und Kauffman-Polynom	8
4.3	HOMFLY-Polynom (1985)	9
A	Das Klammer-Polynom und die Reidemeister-Bewegungen	10
B	Die Hopf-Verschlingung	13
C	Die Windungszahl und die Reidemeisterbewegungen	14
D	Der Kleeblattknoten und sein Spiegelbild	15
E	Die Flechtrelation des Jones-Polynoms	17
F	Literatur	17

1 Klammer- und Jones-Polynom

1.1 Das Klammer-Polynom

Man legt die Bedingungen fest, die das Klammer-Polynom $\langle K \rangle$ einer Knotenprojektion K erfüllen soll:

1. $\langle \bigcirc \rangle = 1$
2. $\begin{cases} \langle \diagup \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + B \langle \smile \rangle \\ \langle \diagdown \rangle = A \langle \smile \rangle + B \langle \rangle \langle \rangle \end{cases}$
3. $\langle L \cup \bigcirc \rangle = C \langle L \rangle$

Man bestimmt die drei Unbekannten A, B, C so, dass das Klammer-Polynom unter den Reidemeisterbewegungen invariant ist, also eine Knoteninvariante wird (siehe Anhang A). Mit diesem Regelsatz bleibt $\langle K \rangle$ invariant unter der zweiten und dritten Reidemeisterbewegung:

1. $\langle \bigcirc \rangle = 1$
2. $\begin{cases} \langle \diagup \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \smile \rangle \\ \langle \diagdown \rangle = A \langle \smile \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle \end{cases}$
3. $\langle L \cup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle L \rangle$

Beispiel 1 Triviale Verschlingung

- von 2 Komponenten:

$$\langle \bigcirc \cup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2})$$

- von n Komponenten:

$$\langle \bigcirc \cup \dots \cup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2})^{n-1}$$

Beispiel 2 Hopf-Verschlingung: (siehe Anhang B)

$$\langle \bigcirc \bigcirc \rangle = -A^4 - A^{-4}$$

Auswirkung der ersten Reidemeisterbewegung (siehe Anhang A) :

- $\langle \overline{\bigcirc} \rangle = -A^3 \langle \text{---} \rangle$
- $\langle \overline{\bigcirc} \rangle = -A^{-3} \langle \text{---} \rangle$

Das Klammer-Polynom ist keine Knoteninvariante, da es sich unter der ersten Reidemeisterbewegung ändert.
Ausweg: Die Projektion wird mit einer Orientierung versehen und es wird zusätzlich die Windungszahl betrachtet.

1.2 Die Windungszahl

Definition 1 Für die Berechnung der Windungszahl, wird jede Kreuzung der orientierten Projektion L , entweder mit $+1$ oder mit -1 , versehen:

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} = +1, \quad \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \end{array} = -1$$

Die Windungszahl $w(L)$ ist die Summe der Zahlen in der Projektion.

Die Windungszahl ändert sich unter der zweiten und dritten Reidemeisterbewegungen nicht, unter der ersten Reidemeisterbewegung ändert sich die Windungszahl um ± 1 (siehe Anhang C).

1.3 Das X-Polynom

Mit dem Klammer-Polynom und der Windungszahl hat man die beiden Komponenten, mit denen sich eine polynomiale Invariante einer Projektion eines Knotens oder einer Verschlingung definieren lässt:

Definition 2 Das X -Polynom einer Projektion L eines Knotens oder einer Verschlingung wird definiert als:

$$X(L) = (-A^3)^{-w(L)} \langle L \rangle$$

Da die zweite und dritte Reidemeisterbewegung, weder $\langle L \rangle$ noch $w(L)$ ändern, ändern sie auch nicht $X(L)$.

Die Wirkung der ersten Reidemeisterbewegung:

$$L' := \overrightarrow{\bigcirc} \longleftrightarrow \longrightarrow =: L$$

$$\begin{aligned}
w(L') &= w(L) + 1, \\
X(L') &= (-A^3)^{-w(L')} \langle L' \rangle = (-A^3)^{-(w(L)+1)} \langle L' \rangle \\
&= (-A^3)^{-(w(L)+1)} \underbrace{(-A^3) \langle L \rangle}_{RM1 \text{ auf } L'} = (-A^3)^{-w(L)} \langle L \rangle \\
&= X(L)
\end{aligned}$$

(Die anderen Fälle entsprechend.)

Also ist $X(L)$ eine Invariante von Knoten und Verschlingungen, es hängt nicht von der Projektion, sondern nur vom Knoten selber ab.

1.4 Das Jones-Polynom

Definition 3 Das Jones-Polynom $V(L)$ einer Projektion L ergibt sich aus $X(L)$, indem man A durch $t^{-\frac{1}{4}}$ ersetzt:

$$V(L) = (-t^{-\frac{3}{4}})^{-w(L)} \langle L \rangle$$

(1984 von V. Jones veröffentlicht)

Beispiel 3 Jones-Polynom des Kleeblattknotens und seines Spiegelbildes (siehe Anhang D) :

$$V \left(\text{Kleeblattknoten} \right) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}, \quad V \left(\text{Spiegelbild des Kleeblattknotens} \right) = -t^4 + t^3 + t$$

Eigenschaften des Jones-Polynoms:

- alle Primknoten mit 10 oder weniger Kreuzungen haben unterschiedliches Jones-Polynom und sind deswegen unterschiedlich
- Das Jones-Polynom erfüllt eine eigene Flechtrelation (siehe Anhang E) :

$$\begin{aligned}
\text{mit } L_+ &= \begin{array}{c} \nearrow \quad \searrow \\ \searrow \quad \nearrow \end{array}, \quad L_- = \begin{array}{c} \searrow \quad \nearrow \\ \nearrow \quad \searrow \end{array} \quad \text{und} \quad L_0 = \begin{array}{c} \nearrow \quad \nearrow \\ \searrow \quad \searrow \end{array} \quad \left(\begin{array}{c} \nearrow \quad \searrow \\ \searrow \quad \nearrow \end{array} \right) \\
\text{gilt } t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) &= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(L_0)
\end{aligned}$$

Offene Fragen:

- Gibt es einen nichttrivialen Knoten, dessen Jones-Polynom 1 ist?

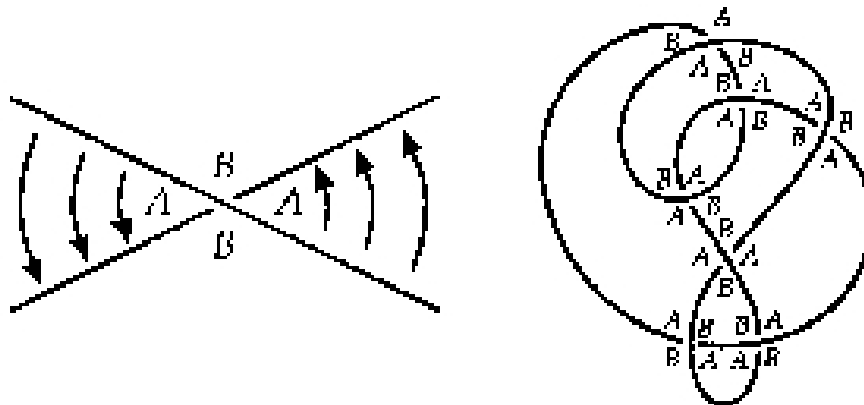


Abbildung 1: A-B Aufteilung der Kreuzungen

2 Eine andere Sicht auf das Klammer-Polynom

Nun geht es um eine andere Sichtweise auf das Klammer-Polynom. Die Regel 2 lässt sich auf folgende Weise interpretieren: An einer Kreuzung treffen 4 Gebiete aufeinander, diese werden nun mit A und B markiert. Mit A werden die beiden Gebiete markiert, die bei Drehung der Überkreuzung, gegen den Uhrzeigersinn, überstrichen werden (siehe Abbildung 1). Durch Anwendung der Regel 2 wird eine Kreuzung auf zwei verschiedene Weisen aufgespalten, einerseits öffnet die A-Aufspaltung die Verbindung zwischen den beiden A-Gebieten, andererseits öffnet die B-Aufspaltung die Verbindung zwischen den beiden B-Gebieten (siehe Abbildung 2).

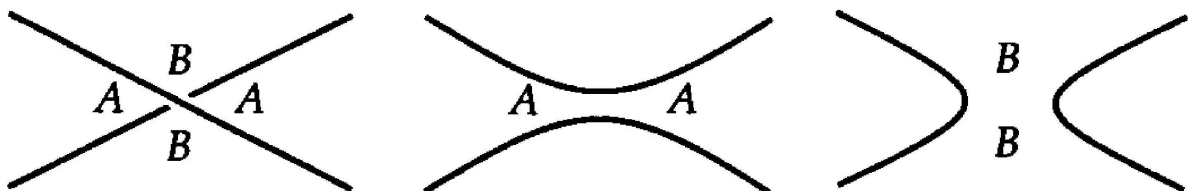


Abbildung 2: A-B Aufteilung an einer Kreuzung und A- bzw. B-Aufspaltung

Ist eine Projektion von einer Verschlingung L mit n Kreuzungen gegeben, dann kann man durch Anwendung von Regel 2 an einer Kreuzung das Klammer-Polynom von L durch die Klammer-Polynome von L_1 und L_2 berechnen, die beide eine Kreuzung weniger haben. Wendet man Regel 2 erneut jeweils auf L_1 und L_2 an, so gelangt man zu 4 Verschlingungen, die alle $n - 2$ Kreuzungen haben. Dieses Verfahren lässt sich fortführen, bis man das Klammer-Polynom von L dargestellt hat, als Summe über 2^n Klammer-Polynome von Verschlingungen, die alle keine Kreuzung mehr haben. Jede der 2^n Verschlingungen entspricht einer Auswahl von A- oder B-Aufteilung an jeder Kreuzung. Eine solche Auswahl heißt **Zustand**. Das Klammer-Polynom von L berechnet

sich dann aus allen 2^n möglichen Zuständen: Sei S_i ein Zustand, der die Projektion von L in die Projektion L_i überführt (S_i beschreibt also, für jede Kreuzung von L , ob man sich für eine A- oder B-Aufspaltung entschieden hat). Dann besteht L_i aus einer Menge sich nicht schneidender geschlossener Kurven. Es bezeichne $|S_i|$ die Anzahl dieser Kurven.

Aus Beispiel 1 folgt, dass das Klammer-Polynom $\langle L_i \rangle = (-A^2 - A^{-2})^{|S_i|-1}$ ist.

Der Koeffizient dieses Terms ergibt sich aus der Anzahl $a(S_i)$ der A-Aufteilungen und der Anzahl $b(S_i)$ der B-Aufteilungen von S_i : der Faktor vor $\langle L_i \rangle$ ist also $A^{a(S_i)}A^{-b(S_i)}$.

Das Klammer-Polynom $\langle L \rangle$ ergibt sich nun als Summe über alle Zustände S_i :

$$\langle L \rangle = \sum_{i=1}^{2^n} A^{a(S_i)} A^{-b(S_i)} (-A^2 - A^{-2})^{|S_i|-1}$$

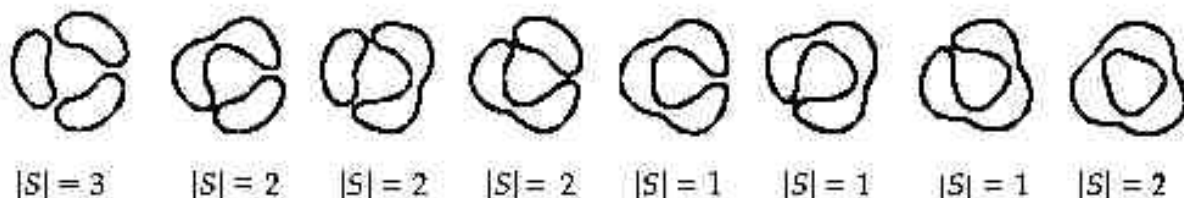


Abbildung 3: Die mgl. Zustände bei einem Kleeblattknoten

3 Polynome alternierender Knoten

Ein alternierender Knoten ist ein Knoten, bei dem sich Über- und Unterkreuzungen abwechseln, wenn man die Knotenprojektion in einer festen Richtung umläuft.

Eine alternierende Knotenprojektion heißt **reduziert**, wenn es keine unnötigen Kreuzungen, wie in Abbildung 4 gibt.

Nichtreduzierte alternierende Knotenprojektionen lassen sich immer zu einer reduzierten alternierenden Knotenprojektion vereinfachen, dabei verringert sich die Anzahl der Kreuzungen.

Ist die Knotenprojektion bereits reduziert, findet man keine offensichtliche Möglichkeit die Kreuzungszahl zu verringern. Dies führte im vorletzten Jahrhundert zu zwei Vermutungen, die erst 1986 bewiesen werden konnten:

Vermutung 1 *Zwei reduzierte alternierende Knotenprojektionen desselben Knotens haben dieselbe Anzahl von Kreuzungen.*

Vermutung 2 *Die Anzahl der Kreuzungen einer reduzierten alternierenden Knotenprojektion ist gleich dem Minimum der Anzahl aller in irgendeiner Knotenprojektion auftretenden Kreuzungen.*

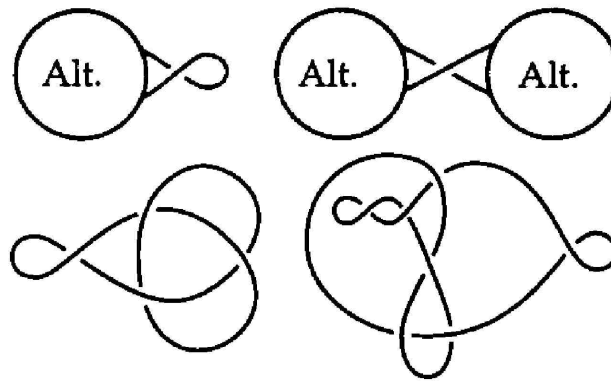


Abbildung 4: Nichtreduzierte alternierende Knotenprojektionen

Beide Vermutungen konnten erst durch die neuen Polynome gezeigt werden. Als Folgerung aus beiden lässt sich die Selbstschnittzahl eines alternierenden Knotens einfach aus einer reduzierten alternierenden Projektion bestimmen. Das Minimum der Kreuzungen (die Selbstschnittzahl der Knotens) tritt in einer reduzierten Knotenprojektion auf.

Beweisskizze zur ersten Vermutung:

Definition 4 Die *Höhe* des Klammer-Polynoms ist die Differenz des größten und des niedrigsten Exponenten.

Die Höhe des Klammer-Polynoms ist eine Knoteninvariante, obwohl das Polynom selber keine ist: Das Klammer-Polynom ist invariant unter der zweiten und dritten Reidemeisterbewegung. Die erste Reidemeisterbewegung bewirkt eine Multiplikation mit $A^{\pm 3}$. Dadurch ändert sich der größte und der niedrigste Exponent je um ± 3 , die Differenz bleibt invariant.

Die erste Vermutung folgt aus Hilfssatz:

Hilfssatz: Wenn K eine reduzierte alternierende Projektion mit n Kreuzungen ist, so gilt $\text{Höhe}(\langle K \rangle) = 4n$.

Wenn die erste Projektion n Kreuzungen hat, so ist die Höhe des Klammer-Polynoms $4n$. Die Höhe ist eine Invariante, damit hat die zweite Projektion ebenfalls die Höhe $4n$, und nach dem Hilfssatz auch n Kreuzungen. \square

1983 bewies Menasco: Falls der zusammengesetzte Knoten $K_1 \# K_2$ alternierend ist, so tritt er in jeder alternierenden Projektion zusammengesetzt auf. D.h. es gibt immer eine geschlossene Kurve, die die Projektion zweimal schneidet und die Faktorknoten K_1 und K_2 sind innerhalb und außerhalb der Kurve alternierend (siehe Abbildung 5).

Mit der zweiten Vermutung und Menascos Ergebnis kann man zeigen:

Folgerung 1 Ist $K_1 \# K_2$ ein alternierender Knoten, so gilt $c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2)$.

Beweis: In einer reduzierten alternierenden Projektion von $K_1 \# K_2$ tritt, nach Menascos Ergebnis, K_1 auf. Dann liegt eine reduzierte alternierende Projektion von K_1 vor. Vermutung 2 sagt aus,

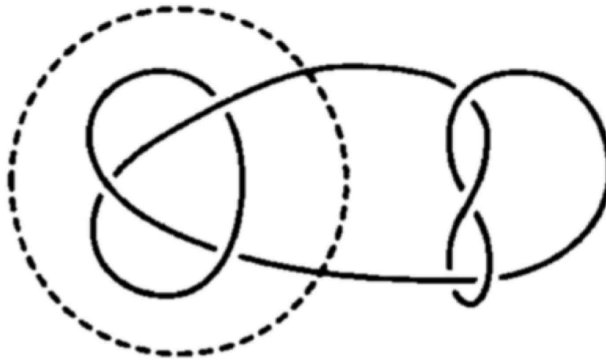


Abbildung 5: Zusammengesetzter Knoten

dass die minimale Anzahl von Kreuzung in dieser Projektion von K_1 vorliegt. Genauso liegt die minimale Kreuzungszahl für K_2 vor. Da ebenfalls $K_1 \# K_2$ alternierend ist, liegt auch für den zusammengesetzten Knoten die minimale Anzahl an Kreuzungen in dieser Projektion vor. Folglich gilt:

$$c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2) \quad (1)$$

Alternierende Knoten sind die erste Klasse von Knoten, für die (1) bewiesen werden konnte.

Offene Fragen

- Gibt es andere Knoten, die ihre Selbstschnittzahl in einem bestimmten Typ von Projektion annehmen?
- Gibt es weitere Klassen von Knoten für die (1) gilt?

4 Die wichtigsten Knotenpolynome im Überblick

$$L_+ = \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}, \quad L_- = \begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array}, \quad L_0 = \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \quad \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array} \right)$$

4.1 Alexander und Conway-Polynom

Alexander-Polynom (1928)

Ursprünglich mittels kombinatorischer Methoden eingeführt, konnte Conway 1969 zeigen, dass sich das Alexander-Polynom $\Delta(K)$ mittels zweier Regeln berechnen lässt:

1. $\Delta(\bigcirc) = 1$
2. $\Delta(L_+) - \Delta(L_-) + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta(L_0) = 0$

Bemerkung:

- es gibt nichttriviale Knoten K mit $\Delta(K) = 1$ (z.B. $K = (-3, 5, 7)$ -Brezel Knoten)
- das Alexander-Polynom unterscheidet einen Knoten nicht von seinem Spiegelbild

Conway-Polynom (1969)

Das Conway-Polynom ergibt sich aus dem Alexander-Polynom durch die Substitution $z := (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$

1. $\nabla(\bigcirc) = 1$
2. $\nabla(L_+) - \nabla(L_-) + z\nabla(L_0) = 0$

Bemerkung: Das Conway-Polynom ist nur eine Variablenänderung in dem Alexander-Polynom, deswegen ist es weder besser noch schlechter im Unterscheiden von Knoten. Conway hat mit seinem Polynom aber die Flechtrelation für das Alexander-Polynom entdeckt und es damit einer rekursiven Berechnung zugänglich gemacht.

4.2 Jones und Kauffman-Polynom

Kauffman-Polynom

$$X(L) = (-A^3)^{-w(L)} \langle L \rangle$$

Ersetzt man A durch $t^{-\frac{1}{4}}$ erhält man das Jones-Polynom:

Jones-Polynom (1984)

$$V(L) = (-t^{-\frac{3}{4}})^{-w(L)} \langle L \rangle$$

Bemerkungen:

- es gibt verschiedene Knoten mit dem gleichen Jones-Polynom
- alle Primknoten mit 10 oder weniger Kreuzungen haben unterschiedliches Jones-Polynom

4.3 HOMFLY-Polynom (1985)

1. $P(\bigcirc) = 1$

2. $lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0$

Bemerkungen:

- HOMFLY steht für: Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish und Yetter; weitere Entdecker: Przytycki und Traczyk
- Verallgemeinerung:
 - des Jones-Polynoms: $V(t) = P(l = it^{-1}, m = i(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}))$
 - des Alexander-Polynoms: $\Delta(t) = P(l = i, m = i(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}))$
- es gibt verschiedene Knoten mit dem gleichen HOMFLY-Polynom

A Das Klammer-Polynom und die Reidemeister-Bewegungen

In diesem Anhang geht es um die Bestimmung der Konstanten B und C aus dem ersten Abschnitt und darum, ob das Klammer-Polynom invariant unter den Reidemeister-Bewegungen ist.

- Die zweite Reidemeisterbewegung:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Diagram 1} \rangle &= A \langle \text{Diagram 2} \rangle + B \langle \text{Diagram 3} \rangle \\
 &= A(A \langle \text{Diagram 4} \rangle + B \langle \text{Diagram 5} \rangle) \\
 &\quad + B(A \langle \text{Diagram 6} \rangle \langle \text{Diagram 7} \rangle + B \langle \text{Diagram 8} \rangle) \\
 &= (A^2 + B^2 + ABC) \langle \text{Diagram 9} \rangle + (BA) \langle \text{Diagram 10} \rangle \langle \text{Diagram 11} \rangle \\
 &\stackrel{!}{=} \langle \text{Diagram 12} \rangle \langle \text{Diagram 13} \rangle
 \end{aligned}$$

- Die dritte Reidemeisterbewegung:

$$\left\langle \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \hline \diagdown \quad \diagup \end{array} \right\rangle = A \left\langle \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \hline \quad \quad \quad \cup \\ \quad \quad \quad \cap \end{array} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \hline \quad \quad \quad \cap \\ \quad \quad \quad \cup \end{array} \right\rangle$$

$$= A \left\langle \begin{array}{c} \quad \quad \quad \cup \\ \diagdown \quad \diagup \\ \hline \diagup \quad \diagdown \end{array} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \quad \quad \quad \cap \\ \diagdown \quad \diagup \\ \hline \diagdown \quad \diagup \end{array} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \hline \diagdown \quad \diagup \end{array} \right\rangle$$

- Die erste Reidemeisterbewegung:

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\bigcirc} \rangle &= A \langle \overline{\bigcirc} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\smile} \rangle \\
&= A(-A^2 - A^{-2}) \langle \text{---} \rangle + A^{-1} \langle \text{---} \rangle \\
&= -A^3 \langle \text{---} \rangle \\
\langle \overline{\bigcirc} \rangle &= A \langle \overline{\smile} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\bigcirc} \rangle \\
&= A \langle \text{---} \rangle + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) \langle \text{---} \rangle \\
&= -A^{-3} \langle \text{---} \rangle
\end{aligned}$$

B Die Hopf-Verschlingung

Ein erstes Beispiel für die Berechnung des Klammer-Polynoms:

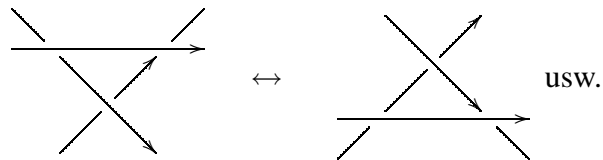
$$\begin{aligned}
 \langle \text{Hopf} \rangle &= A \langle \text{Hopf}_A \rangle + A^{-1} \langle \text{Hopf}_{A^{-1}} \rangle \\
 &= A(A \langle \text{Hopf}_{A^2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Hopf}_{A^{-2}} \rangle) \\
 &\quad + A^{-1}(A \langle \text{Hopf}_{A^2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Hopf}_{A^{-2}} \rangle) \\
 &= A^2(-A^2 - A^{-2}) + 1 + 1 + A^{-2}(-A^2 - A^{-2}) \\
 &= -A^4 - A^{-4}
 \end{aligned}$$

Im Abschnitt über den Kleeblattknoten wird auch das Klammer-Polynom des Spiegelbildes benötigt:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Hopf} \rangle &= A \langle \text{Hopf}_A \rangle + A^{-1} \langle \text{Hopf}_{A^{-1}} \rangle \\
 &= A(A \langle \text{Hopf}_{A^2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Hopf}_{A^{-2}} \rangle) \\
 &\quad + A^{-1}(A \langle \text{Hopf}_{A^2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Hopf}_{A^{-2}} \rangle) \\
 &= (A^2 + A^{-2}) \langle \text{Hopf}_{A^2} \rangle + 2 \langle \text{Hopf}_{A^{-2}} \rangle \\
 &= A^2(-A^2 - A^{-2}) + A^{-2}(-A^2 - A^{-2}) + 2 \\
 &= -A^4 - A^{-4}
 \end{aligned}$$

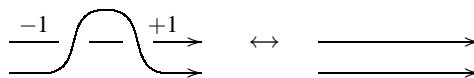
C Die Windungszahl und die Reidemeisterbewegungen

- die dritte Reidemeisterbewegung:



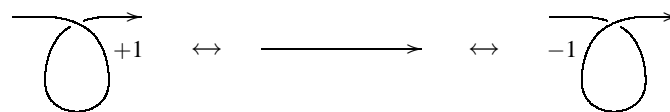
Das Verschieben von einem Strang ändert nicht den Typ der beiden betroffenen Kreuzungen, deswegen bleibt die Windungszahl gleich.

- Die zweite Reidemeisterbewegung:



Die Windungszahl ändert sich nicht.

- Die erste Reidemeisterbewegung:



Die Windungszahl ändert sich!

D Der Kleeblattknoten und sein Spiegelbild

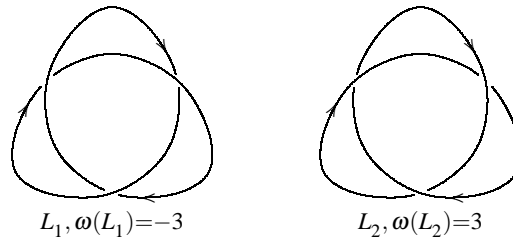


Abbildung 6: Der Kleeblattknoten und sein Spiegelbild

Berechnung von $X(L_1)$

$$\begin{aligned}
 \langle L_1 \rangle &= A \left\langle \text{Diagram 1} \right\rangle + A^{-1} \underbrace{\left\langle \text{Diagram 2} \right\rangle}_{\text{Hopf-Verschlingung}} \\
 &= A(A \left\langle \text{Diagram 1} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \text{Diagram 1} \right\rangle) + A^{-1}(-A^4 - A^{-4}) \\
 &= (A^2(-A^2 - A^{-2}) + 1) \underbrace{\left\langle \text{Diagram 1} \right\rangle}_{=-A^3 \text{ (siehe weiter unten)}} - A^3 - A^{-5} \\
 &= (-A^4)(-A^3) - A^3 - A^{-5} = A^7 - A^3 - A^{-5}
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $X(L_1) = (-A^3)^{-\omega(L_1)} \langle L_1 \rangle$ zu:

$$X(L_1) = (-A^3)^{-(-3)}(A^7 - A^3 - A^{-5}) = -A^{16} + A^{12} + A^4 \Rightarrow V(L_1) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$$

Berechnung von $X(L_2)$

$$\begin{aligned}
 \langle L_2 \rangle &= A \underbrace{\left\langle \text{Hopf-Verschlingung} \right\rangle}_{\text{Hopf-Verschlingung}} + A^{-1} \left\langle \text{Kleeblattknoten} \right\rangle \\
 &= A(-A^4 - A^{-4}) + A^{-1} \left(A \underbrace{\left\langle \text{Kleeblattknoten} \right\rangle}_{=-A^{-3} \text{ (siehe weiter unten)}} + A^{-1} \left\langle \text{Kleeblattknoten} \right\rangle \right) \\
 &= (-A^5 - A^{-3}) - A^{-3} + A^{-2}(-A^{-2} - A^2)(-A^{-3}) \\
 &= (-A^5 - A^{-3}) - A^{-3} + A^{-7} + A^{-3} \\
 &= -A^5 - A^{-3} + A^{-7}
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $X(L_2) = (-A^3)^{-\omega(L_2)} \langle L_2 \rangle$ zu:

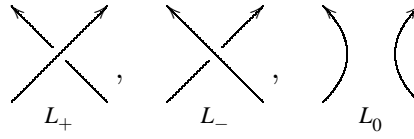
$$X(L_2) = (-A^3)^{-3} (A^{-7} - A^5 - A^{-3}) = -A^{-16} + A^{-12} + A^{-4} \Rightarrow V(L_2) = -t^4 + t^3 + t$$

Fazit Der Kleeblattknoten ist von seinem Spiegelbild verschieden!

Bei der Berechnung wurden diese beiden Zwischenergebnisse verwendet:

$$\begin{aligned}
 \left\langle \text{Kleeblattknoten} \right\rangle &= A \left\langle \text{Hopf-Verschlingung} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \text{Kleeblattknoten} \right\rangle \\
 &= A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1} = -A^3 \\
 \left\langle \text{Kleeblattknoten} \right\rangle &= A \left\langle \text{Kleeblattknoten} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \text{Hopf-Verschlingung} \right\rangle \\
 &= A + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) = -A^{-3}
 \end{aligned}$$

E Die Flechtrelation des Jones-Polynoms



Berechnung der Jones-Polynome:

$$V(L_+) = (-t^{-\frac{3}{4}})^{-(\omega(L_0)+1)} (t^{-\frac{1}{4}} \langle \rangle \langle \rangle + t^{\frac{1}{4}} \langle \smile \rangle \langle \rangle)$$

$$V(L_-) = (-t^{-\frac{3}{4}})^{-(\omega(L_0)-1)} (t^{-\frac{1}{4}} \langle \smile \rangle \langle \rangle + t^{\frac{1}{4}} \langle \rangle \langle \rangle)$$

$$V(L_0) = (-t^{-\frac{3}{4}})^{-\omega(L_0)} \langle \rangle \langle \rangle$$

Damit:

$$t^{-1}V(L_+) = (-t^{-\frac{3}{4}})^{-\omega(L_0)-1} (t^{-\frac{5}{4}} \langle \rangle \langle \rangle + t^{-\frac{3}{4}} \langle \smile \rangle \langle \rangle) \quad (2)$$

$$tV(L_-) = (-t^{-\frac{3}{4}})^{-\omega(L_0)+1} (t^{\frac{3}{4}} \langle \smile \rangle \langle \rangle + t^{\frac{5}{4}} \langle \rangle \langle \rangle) \quad (3)$$

(2) - (3) liefert:

$$\begin{aligned} & -(-1)^{-\omega(L_0)} (t^{-\frac{3}{4}})^{-\omega(L_0)} (t^{-\frac{2}{4}} \langle \rangle \langle \rangle + t^0 \langle \smile \rangle \langle \rangle) \\ & + (-1)^{-\omega(L_0)} (t^{-\frac{3}{4}})^{-\omega(L_0)} (t^0 \langle \smile \rangle \langle \rangle + t^{\frac{2}{4}} \langle \rangle \langle \rangle) \\ & = (-t^{-\frac{3}{4}})^{-\omega(L_0)} (t^{\frac{1}{2}} \langle \rangle \langle \rangle - t^{-\frac{1}{2}} \langle \rangle \langle \rangle) \\ & = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) \underbrace{(-t^{-\frac{3}{4}})^{-\omega(L_0)} \langle \rangle \langle \rangle}_{=V(L_0)} \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich für das Jones-Polynom diese Flechtrelation:

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(L_0)$$

F Literatur

Adams, Colin C.:

Das Knotenbuch: Einführung in die mathematische Theorie der Knoten, Spektrum Akad. Verlag, 1995