

Numerische Methoden der Mathematik 2
Vorlesung von Prof. Dr. V. Klotz
im Sommersemester 2003

in L^AT_EX 2_ε gesetzt von Lars Fischer

Inhaltsverzeichnis

I. Theoretische Grundlagen Gewöhnlicher Differentialgleichungen	1
1. Einführung und Grundlagen	3
2. DGLn n-ter Ordnung und Systeme von DGLn erster Ordnung	7
2.1. Lineare DGLn erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten	7
2.2. Ermittlung einer Lösung der inhomogenen DGL	11
3. Lineare Systeme erster Ordnung	15
3.1. DGL-Systeme erster Ordnung mit variablen Koeffizienten	17
3.1.1. Algebraische Theorie dieser Systeme	18
3.1.2. Konstruktion eines Fundamentalsystems	21
3.2. Lineare DGL-Systeme mit konstanter Koeffizienten Matrix	23
4. Existenz und Eindeutigkeit bei AWP	29
4.1. Funktionalanalytische Hilfsmittel	29
4.2. Der Existenz und Eindeutigkeitssatz	34
II. Numerik Gewöhnlicher Differentialgleichungen	39
5. Numerische Behandlung von AWP	41
5.1. Einschrittverfahren	41
5.1.1. Euler Verfahren	41
5.2. Das allgemeine Einschrittverfahren	42
5.3. Spezielle Einschrittverfahren	46
5.3.1. Direkte Anwendung der Taylorentwicklung	46
5.3.2. Indirekte Verwendung der Taylormethode	48
5.4. Mehrschrittverfahren	51
5.5. Herleitung von Mehrschrittverfahren	53
5.6. Konsistenz, Stabilität und Konvergenz bei MV	57
5.7. Lineare Mehrschrittverfahren	64
5.8. Konstruktion von linearen MV	68
Symbolverzeichnis	73

Inhaltsverzeichnis

Index

74

Teil I.

**Theoretische Grundlagen
Gewöhnlicher
Differentialgleichungen**

1. Einführung und theoretische Grundlagen Gewöhnlicher Differentialgleichungen

Definition 1.1 Eine Gewöhnlich Differentialgleichung (Abkürzung: GDGl) ist eine Gleichung in einer Funktion y , gewöhnlichen Ableitungen von ihr und dem Argument von y , meistens x .

24.04.2003

Sprechweisen:

Ist y Funktion von einer reellen Variablen, so hat man nur gewöhnliche Ableitungen und man spricht von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Ist y hingegen Funktion mehrerer reeller Variablen, so hat man partielle Ableitungen und man spricht von partiellen DGLn.

Hier geht es im Folgenden um Gewöhnliche Differentialgleichungen!

Die allgemeine Form einer GDGl lautet:

$$F(x; y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

F ist hier eine Funktion in den $n + 2$ Variablen: $x, y, y', \dots, y^{(n)}$.

Definition 1.2 Die DGLn (1) heißt von der **Ordnung** n , wenn n die Ordnung der höchsten Ableitung ist, die in (1) vorkommt.

Zu lösende Aufgabe:

Man ermittle die, auf einem vorgegebenem Intervall $[a, b]$, $a < b$ der x -Achse definierte, n -mal diff-bare Funktion y , die (1) identisch erfüllt.

Sprechweisen

y erfüllt die DGL (1) auf $[a, b]$ bzw. y ist die Lösung der DGL (1) auf $[a, b]$.

Definition 1.3 Eine DGL der Form

1. $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ heißt **implizite**
2. $y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ heißt **explizite**

DGL der Ordnung $n \in \mathbb{N}$.

1. Einführung und Grundlagen

Beispiel: 1.1 1. $y'' = (y')^2 + 4xy + 1$ ist explizit

2. $e^{y'} - 1 - x^2 = 0$ ist implizit, aber zu überführen in die explizite DGL $y' = \log(1+x^2)$

3. $y' + e^{y'} + y + x^2 = 0$ ist implizit und nicht zu überführen

Verallgemeinerung der Aufgabenstellung:

Gesucht sind n Funktionen y_1, \dots, y_n , die mit ihren ersten Ableitungen mehreren Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n)\end{aligned}$$

Hierfür wird nun eine kompaktere Schreibweise eingeführt:

Definition 1.4 *Es sei*

$$\begin{aligned}\vec{y} &= (y_1, \dots, y_n)^t & f_i &= f_i(x; y_1, \dots, y_n) \text{ für } i = 1, \dots, n \\ \vec{y}' &= (y_1', \dots, y_n')^t & \vec{f} &= (f_1, \dots, f_n)^t.\end{aligned}$$

Dann heißt ein System von DGLn der Form $\vec{y}' = \vec{f}(x; \vec{y})$ explizites DGL-System erster Ordnung.

Es besteht ein Zusammenhang zwischen expliziten DGLn der Ordnung n

$$y^{(n)} = f(x; y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

und Systemen von DGLn erster Ordnung

$$\vec{y}' = \vec{f}(x; \vec{y}). \quad (3)$$

Nämlich (2) lässt sich in ein äquivalentes System von DGLn erster Ordnung für n Funktionen y_1, \dots, y_n überführen. Hierzu setze man:

$$\begin{aligned}y_1(x) &:= y(x) \\ y_2(x) &:= y_1' && (= y'(x)) \\ &\vdots \\ y_n(x) &:= y_{n-1}' && (= y^{(n-1)}(x)) \\ y_n'(x) &= f(x; y_1, \dots, y_n) && (= f(x, y, y', \dots, y^{n-1}))\end{aligned}$$

Bezeichne (4) dieses obige Gleichungssystem.

$$\text{Mit } \vec{y}' := \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \quad \vec{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \vec{f} := \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ f(x; y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

lässt sich (4) schreiben als $\vec{y}' = \vec{f}(x; \vec{y})$. Offensichtlich ist (2) äquivalent zu (4).

Anfangswertprobleme:

Für die Anwendung sind die sogenannten **Anfangswertprobleme** (Abkürzung: AWP) von Interesse, die zusätzlich von der Lösungsfunktion einer DGI fordern, dass die n gewönl. Ableitungen von ihr an einer festen Stelle mit vorgegebenen Werten übereinstimmen.

So ist das zu (2) gehörende AWP bei vorgegebenen $a \in \mathbb{R}$ und vorgegebenen $y_k \in \mathbb{R}, k = 0, \dots, n-1$ zu formulieren als

$$(5) \begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y^{(k)}(a) = \eta_k \quad k = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

Eine Funktion löst das AWP (5), wenn y die DGI (2) identisch erfüllt und $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ an der Stelle a den Wert $\eta_0, \dots, \eta_{n-1}$ annimmt.

Mit den vorhergehenden Überlegungen folgt: (5) ist äquivalent mit dem AWP für das System von n DGIn erster Ordnung ($y_1 := y$)

$$\begin{array}{ll} y_1' = y_2 & y_1(a) = \eta_0 \\ \vdots & \vdots \\ y_{n-1}' = y_n & y_{n-1}(a) = \eta_{n-2} \\ y_n' = f(x; y, y_1, \dots, y_n) & y_n(a) = \eta_{n-1} \end{array}$$

Beispiel: 1.2 Solche AWP sind durch viele Anwendungen motiviert. Z.B.: Gesucht wird eine harmonische Schwingung, d.h. eine Lösung der DGI: $y'' + \omega^2 y = 0$ $\omega \neq 0$, die an der Stelle $x = 0$ die Auslenkung 1 und die Anfangsgeschwindigkeit 0 besitzt, also $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ erfüllt

1. Einführung und Grundlagen

2. DGLn n-ter Ordnung und Systeme von DGLn erster Ordnung

2.1. Lineare DGLn erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Betrachte im Folgenden DGLn der Form:

$$Ly := \sum_{k=0}^n \alpha_k y^{(k)}(x) = \Phi(x) \quad \alpha_k \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Ist $\Phi(x) \neq 0$, so heißt (1) **homogene**, andernfalls **inhomogene** DGLn.

Definition 2.1 Auf $[a, b]$, $a < b$ seien n Funktionen y_1, \dots, y_n gegeben. Diese Funktionen heißen **linear unabhängig** auf $[a, b]$, wenn aus

$$\sum_{i=1}^n c_i y_i(x) \equiv 0 \quad (2)$$

$\forall x \in [a, b]$ und $c_i \in \mathbb{C}$ stets $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ folgt. Andernfalls heißen diese Funktionen **linear abhängig**

Beispiel: 2.1 1. Die Funktionen $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ sind auf jedem Intervall linear unabhängig.

2. Die Funktionen $y_1(x) = \cos(\omega x)$ $y_2(x) = \sin(\omega x)$ $\omega \neq 0$ sind auf jedem Intervall linear unabhängig.

3. Die Funktionen $y_k(x) = e^{\lambda_k x}$, $k = 1, \dots, n$ $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ sind linear unabhängig auf jedem Intervall. Denn aus $c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x} \equiv 0$ folgt:

$$\begin{aligned} c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n \lambda_n e^{\lambda_n x} &= 0 \\ &\vdots \\ c_1 \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} &= 0 \end{aligned}$$

2. DGLn n-ter Ordnung und Systeme von DGLn erster Ordnung

Die Determinante dieses homogenen linearen Gleichungssystems in c_1, \dots, c_n ist

$$\begin{aligned} \Delta e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} &= \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \\ &= e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x} \prod_{i,j=1}^n (\lambda_i - \lambda_j) \end{aligned}$$

Das ist die Vandermondsche Determinante. Wegen $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ folgt $\Delta \neq 0$.
Damit existiert nur die triviale Lösung : $c_1 = \dots = c_n = 0$

Beweis: Beweis zu Punkt 2: $y_1(x) = \cos \omega x$, $y_2(x) = \sin \omega x$ und $\omega \neq 0$

$$\left. \begin{array}{l} c_1 \cos \omega x \quad + c_2 \sin \omega x \quad = 0 \quad | \omega \sin \omega x \\ -c_1 \omega \sin \omega x \quad + c_2 \omega \cos \omega x \quad = 0 \quad | \cos \omega x \end{array} \right\} +$$

Nach dem Addieren folgt: $c_2 \omega \sin^2(\omega x) + c_2 \omega \cos^2(\omega x) = 0$. Wegen $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ folgt $c_2 \omega = 0$ also $c_2 = 0$ und damit $c_1 = 0$. ■

Betrachte zunächst die zu (1) gehörende homogene DGL

$$Ly = 0 \tag{3}$$

Definition 2.2 Ein System von linear unabhängigen homogene Lösungen y_1, \dots, y_n der homogenen DGL $Ly = 0$ heißt ein **Fundamentalsystem**.

Satz 2.1 Es sei $X \in C^n[a, b]$ eine beliebige Lösung von (3) . Weiter sei $\{y_1, \dots, y_n\}$ ein Fundamentalsystem der DGL. Dann ex eindeutig bestimmte Zahlen c_1, \dots, c_n mit

$$y(c) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(x)$$

d.h. ein Fundamentalsystem stellt eine Basis des n-dimensionalen Lösungsraums der homogen DGL. dar.

Satz 2.2 (Superpositionsprinzip) Es sei $\Phi \in C[a, b]$. Weiter sei \tilde{y} eine beliebige Lösung der DGL. $Ly = \Phi$ und $\{y_1, \dots, y_n\}$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen DGL $Ly = 0$. Dann besitzt jede Lösung der inhomogenen DGL. die Darstellung

$$y(x) = \tilde{y} + \sum_{i=1}^n c_i y_i(x) \tag{4}$$

mit eindeutig bestimmten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

Definition 2.3 Eine Lösung der inhomogenen DGL. heißt **Partikuläre Lösung**.

2.1. Lineare DGLn erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Ermittlung eines Fundamentalsystems der DGI $Ly = 0$

Ansatz:

$$y(x) = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{C} \quad (5)$$

Wegen $y(x)^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$ folgt:

$$\begin{aligned} Ly &= \sum_{k=0}^n \alpha_k y^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k e^{\lambda x} \\ &= e^{\lambda x} \underbrace{\sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k}_{P_n(\lambda)} \stackrel{\text{Ziel}}{=} 0 \end{aligned}$$

Definition 2.4 $P_n(\lambda) := \sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k$ heißt **charakteristisches Polynom**

Es sei $\tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$ mit $P_n(\tilde{\lambda}) = 0$, dann ist offensichtlich $y(x) = e^{\tilde{\lambda}x}$. P_n besitzt die n paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Es folgt $\{y_k(x) = e^{\lambda_k x}, k = 1, \dots, n\}$ ist ein Fundamentalsystem. D.h. jede Lösung y von $Ly = 0$ besitzt die Darstellung

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k x}.$$

Beispiel: 2.2

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

Es folgt $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$ mit den Nullstellen $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Das Fundamentalsystem ist $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{3x}$. Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Sei λ_1 Nullstelle von P_n mit der genauen Vielfachheit $r \geq 2$, d.h. $P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^r q_{n-r}(\lambda)$ mit $q_{n-r}(\lambda) \neq 0$. Es gilt $P_n(\lambda_1) = P'_n(\lambda_1) = \dots = P_n^{(r-1)}(\lambda_1) = 0$ und $P_n^{(r)}(\lambda_1) \neq 0$.

Behauptung: Die linear unabhängigen Funktionen

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{(r-1)} e^{\lambda_1 x}$$

sind die Lösungen der DGI. $Ly = 0$.

Denn: Sei $y(x) = x^\rho e^{\lambda_1 x}$, $0 \leq \rho \leq r - 1$.

(Leibnizsche Regel: $y^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (x^\rho)^{(i)} (e^{\lambda_1 x})^{(k-i)}$)

2. DGLn n -ter Ordnung und Systeme von DGLn erster Ordnung

Fallunterscheidung: $(x^\rho)^{(i)}$:

- $0 \leq i \leq \rho$:

$$\begin{aligned}(x^\rho)^{(i)} &= \prod_{k=0}^{i-1} (\rho - k) x^{\rho-i} \\ &= \frac{\rho!}{(\rho-i)! i!} i! x^{\rho-i} = \binom{\rho}{i} i! x^{\rho-i}\end{aligned}$$

- $\rho + 1 \leq i \leq k$: $(x^\rho)^{(i)} = 0 = \binom{\rho}{i} i! x^{\rho-i}$ wegen $\binom{\rho}{i} = 0$ für $i \geq \rho + 1$
 $(e^{\lambda_1 x})^{(k-i)} = \lambda_1^{k-i} e^{\lambda_1 x}$

$$Ly = \sum_{k=0}^n \alpha_k y^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{\rho}{i} i! \lambda_1^{k-i} x^{\rho-i} e^{\lambda_1 x} \right)$$

Vertauschung der Summation: $\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_{ki} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n a_{ki}$

$$= e^{\lambda_1 x} \sum_{i=0}^n \binom{\rho}{i} x^{\rho-i} \underbrace{\left(\sum_{k=i}^n \alpha_k \binom{k}{i} i! \lambda_1^{k-i} \right)}_{P_n^{(i)}(\lambda_1)} = 0$$

07.04.2003

Weil $P_n^{(i)}(\lambda_1) = 0$ für $i = 0, 1, \dots, \rho$ ($0 \leq \rho \leq r-1$), da λ_1 r -fache Nullstelle ist! Und $\binom{\rho}{i} = 0$ für $i = \rho + 1, \dots, n$. Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Satz 2.3 Das charakteristische Polynom $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k$, der homogenen DGL $Ly = 0$ besitze die Faktorzerlegung: $P_n(\lambda) = a_n (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Dann bilden die folgenden n Funktionen

$$\begin{aligned}y_{1,1} &= e^{\lambda_1 x}, \dots, y_{1,r_1} = x^{r_1-1} e^{\lambda_1 x} \\ y_{2,1} &= e^{\lambda_2 x}, \dots, y_{2,r_2} = x^{r_2-1} e^{\lambda_2 x} \\ &\vdots \\ y_{s,1} &= e^{\lambda_s x}, \dots, y_{s,r_s} = x^{r_s-1} e^{\lambda_s x}\end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem der DGL $Ly = 0$. Damit ist das Problem des Lösen der DGL auf das Finden von Nullstellen des charakteristischen Polynoms zurückgeführt.

2.2. Ermittlung einer Lösung der inhomogenen DGI

Beispiel: 2.3 $y^{(5)} + 7y^{(4)} + 40y^{(3)} + 184y^{(2)} + 375y' + 225y = 0$ das charakteristische Polynom ist :

$$\begin{aligned} P_5(\lambda) &= \lambda^5 + 7\lambda^4 + 40\lambda^3 + 184\lambda^2 + 375\lambda + 225 \\ &= (\lambda^2 - 25)(\lambda + 3)^2(\lambda + 1) \quad \text{komplexe Nullstelle!} \\ &= (\lambda + 5i)(\lambda - 5i)(\lambda + 3)^2(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Das Fundamentalsystem ergibt sich damit zu $\{e^{-i5x}, e^{i5x}, e^{-3x}, xe^{-3x}e^{-x}\}$. Die allgemeine Lösung ist $y(x) = c_1e^{-i5x} + c_2e^{i5x} + (c_3 + xc_4)e^{-3x} + c_5e^{-x}$, bzw. wegen $c_1e^{-i5x} + c_2e^{i5x} = c_1(\cos 5x + i \sin 5x) + c_2(\cos 5x - i \sin 5x) = \underbrace{(c_1 - c_2)}_{:=\gamma_1} \cos 5x + i \underbrace{(c_1 + c_2)}_{:=\gamma_2} \sin 5x$ kommt man

auf die »reelle Form«:

$$y(x) = \gamma_1 \cos 5x + \gamma_2 \sin 5x (c_3 + c_4x)e^{-3x} + c_5e^{-x}$$

Einschub: Variation der Konstanten

Die Diskussion der Methode der »Variation der Konstanten« findet anhand eines Beispiels statt:

$$y' = x - 2xy$$

Die zugehörige homogene DGI ist $y' = -2xy$ (der Fall $y(x) \equiv 0$ ist eine Lösung aber nicht interessant, sei daher $y(x) \neq 0$). Es folgt mittels »Separation der Variablen«: $\frac{y'}{y} = -2x \rightsquigarrow (\log(|y|))' = -2x \rightsquigarrow \log |y| = -x^2 + \tilde{c} \rightsquigarrow |y(x)| = e^{\tilde{c}} \cdot e^{-x^2} \rightsquigarrow$

$$y(x) = ce^{-x^2}, c \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \quad (*)$$

Letzteres ist eine homogene Lösung, die inhomogen wird mittels Variation der Konstanten ermittelt: Sei dazu $c = c(x)$. Einsetzen in die DGI $y'(x) = x - 2xy$:

$$\begin{aligned} c'(x)e^{-x^2} + c(x)e^{-x^2}(-2x) &= x - 2xc(x)e^{-x^2} \\ c'(x) &= xe^{x^2} \\ c(x) &= \frac{1}{2}e^{x^2} + \gamma \end{aligned}$$

Einsetzen in (*) führt auf die allgemeine Lösung der inhomogenen DGI $y(x) = (\frac{e^{x^2}}{2} + \gamma)e^{-x^2} = \frac{1}{2} + \gamma e^{-x^2}$ (dabei ist $\frac{1}{2}$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGI).

2.2. Ermittlung einer Lösung der inhomogenen DGI $Ly = \Phi$

Satz 2.4 (Variation der Konstanten) Gegeben sei die inhomogene DGI: $Ly = \Phi$. Es seien $c_1, \dots, c_n \in C^1[a, b]$ und $\{y_1, \dots, y_n\}$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen DGI

2. DGLn n-ter Ordnung und Systeme von DGLn erster Ordnung

$Ly = 0$. Weiter gelte für $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c'_k(x) y_k(x) &= 0 \\ \sum_{k=1}^n c'_k(x) y'_k(x) &= 0 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n c'_k(x) y_k^{(n-2)}(x) &= 0 \\ \sum_{k=1}^n c'_k(x) y_k^{(n-1)}(x) &= \frac{1}{\alpha_n} \Phi(x) \quad (\alpha_n \text{ ist der höchste Koeffizient der DGL } Ly = \Phi(x)) \end{aligned}$$

Dann ist die Funktion $\tilde{y}(x) = \sum_{k=1}^n c_k(x) y_k(x)$ eine Lösung der inhomogenen DGL.

Beispiel: 2.4 $n = 2$: $y'' + \omega^2 y = 1$ $\omega \neq 0$ $\omega \in \mathbb{R}$. (Unsere Bezeichnungen sind hier: $\alpha_2 = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_0 = \omega^2, \Phi(x) = 1$.) Das charakteristische Polynom ist $P_n(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2 = 0$ mit den Nullstellen $\lambda_1 = i\omega, \lambda_2 = -i\omega$, also $\tilde{y}_1(x) = e^{i\omega x}, \tilde{y}_2(x) = e^{-i\omega x}$ bzw. in reeller Form: $y_1 = \cos \omega x, y_2 = \sin \omega x$.

Partikulärlösung:

$$\begin{aligned} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 &= 0 \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 &= 1, \quad y_1, y_2 \text{ einsetzen:} \\ c'_1 \cos \omega x + c'_2 \sin \omega x &= 0 \\ -c'_1 \omega \sin \omega x + c'_2 \omega \cos \omega x &= 1 \end{aligned}$$

Das führt auf $c'_2 \omega \sin^2 \omega x + c'_2 \omega \cos^2 \omega x = \cos \omega x$, also $c'_2(x) = \frac{1}{\omega} \cos \omega x$, damit $c_2(x) = \frac{1}{\omega^2} \sin \omega x + \gamma_2$. Andererseits erhält man durch Einsetzen von c_2 :

$$\begin{aligned} c_1(x)' \omega \cos \omega x + \frac{1}{\omega} \cos \omega x \sin \omega x &= 0 \quad (\text{durch } \cos \omega x \neq 0 \text{ teilen}) \\ c'_1(x) &= -\frac{1}{\omega} \sin \omega x \quad \text{und damit} \\ c_1(x) &= \frac{1}{\omega^2} \cos \omega x \gamma_1 \end{aligned}$$

2.2. Ermittlung einer Lösung der inhomogenen DGI

Insgesamt:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\gamma}(x) &= \overbrace{\left(\frac{1}{\omega^2} \cos \omega x + \gamma_1\right)}^{c_1(x)} \overbrace{\cos \omega x}^{\gamma_1(x)} + \left(\frac{1}{\omega^2} \sin \omega x + \gamma_2\right) \sin \omega x \\
 &= \frac{1}{\omega^2} \cos^2 \omega x + \gamma_1 \cos \omega x + \frac{1}{\omega^2} \sin^2 \omega x + \gamma_2 \sin \omega x \\
 &= \underbrace{\frac{1}{\omega^2}}_{\text{partik. Lsg}} + \underbrace{\gamma_1 \cos \omega x + \gamma_2 \sin \omega x}_{\text{homogene Lsg}}
 \end{aligned}$$

Bemerkung:

Bei gewissen inhomogenen Anteilen ist es einfacher mit Hilfe eines speziellen Ansatzes zu einer Partikulärlösung zu gelangen, z.B.: $-\Phi(x) = q(x)e^{\rho x}$, $q \in \Pi_k$, wobei q ein algebraisches Polynom vom Grad $k \in \mathbb{N}_0$ ist.

08.05.2003

Ansatz:

- ρ ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms P_n : $\tilde{y}(x) = \tilde{q}(x)e^{\rho x}$, $\tilde{q} \in \Pi_k$
- ρ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms P_n mit der Vielfachheit m : $\tilde{y}(x) = \tilde{q}(x)e^{\rho x}$, $\tilde{q} \in \Pi_{k+m}$

(genauer :

– homogene Lösung: $y_h = (\tilde{a}_0 + \dots + \tilde{a}_{m-1}x^{m-1} + \tilde{a}_{m-1}x^{m-1}) e^{\rho x}$

– allgemeiner Ansatz: $\tilde{y}_h(x) = \left(\underbrace{\tilde{a}_0 + \dots + \tilde{a}_{m-1}x^{m-1}}_{=0, \text{ da homogene Lsg}} + \tilde{a}_m x^m + \dots + \tilde{a}_{m+k} x^{m+k} x^{k+k} \right) e^{\rho x}$

Das führt auf den vereinfachten Ansatz:

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}_h(x) &= (\tilde{a}_m x^m + \dots + \tilde{a}_{m+k} x^{m+k} x^{k+k}) e^{\rho x} \\
 &= x^m \hat{q}(x) e^{\rho x}, \quad \hat{q} \in \Pi_k
 \end{aligned}$$

)

Beispiel: 2.5 $y'' - y' - 2y = 2xe^{2x}$. Die homogene Gleichung $y'' - y' - 2y = 0$ hat das charakteristische Polynom $P_n(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$ und die allgemeine Lösung $y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$

Partikulärlösung: Aufgrund der Überlegungen in der Bemerkung wird folgender Ansatz (Resonanz) gewählt:

$$\begin{aligned}
 y_p(x) &= (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2) e^{2x} \\
 \alpha_0 e^{2x} &\text{ ist homogene Lösung} \\
 \Rightarrow y_p(x) &= (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2) e^{2x}
 \end{aligned}$$

2. DGLn n-ter Ordnung und Systeme von DGLn erster Ordnung

Die Ableitungen der Ansatz-Funktion y_p :

$$\begin{aligned}y_p'(x) &= (\alpha_1 + 2\alpha_2x + 2\alpha_1x + 2\alpha_2x^2)e^{2x} \\y_p''(x) &= (2\alpha_2 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2x + 2\alpha_1 + 4\alpha_2x + 4\alpha_1x + 4\alpha_2x^2)e^{2x} \\&= (4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_1x + 8\alpha_2x + 4\alpha_2x^2)e^{2x}\end{aligned}$$

Oben eingesetzt:

$$(4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_1x + 8\alpha_2x + 4\alpha_2x^2 - \alpha_1 - 2\alpha_2x - 2\alpha_1x - 2\alpha_2x^2 - 2\alpha_1x - 2\alpha_2x^2)e^{2x} \stackrel{!}{=} 2xe^{2x}$$

Nach Zusammenfassen und Koeffizientenvergleich folgt: $\alpha_1 = -\frac{2}{9}$, $\alpha_2 = \frac{1}{3}$ und damit $y_p(x) = (-\frac{2}{9}x + \frac{1}{3}x^2)e^{2x}$. Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + (-\frac{2}{9}x + \frac{1}{3}x^2)e^{2x}$$

Bei anderem Φ , z.B. $\Phi(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ ist der Ansatz $y_p(x) = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$. Es ist auch $A = 0$ oder $B = 0$ gestattet.

3. Lineare Systeme erster Ordnung

Gegeben sei das folgende lineare System

$$\begin{aligned}y_1'(x) &= \sum_{k=1}^n a_{1,k}y_k(x) + r_1(x) \\y_2'(x) &= \sum_{k=1}^n a_{2,k}y_k(x) + r_2(x) \\&\vdots \\y_n'(x) &= \sum_{k=1}^n a_{n,k}y_k(x) + r_n(x)\end{aligned}$$

Bzw. in vektorieller Schreibweise mit

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

erhält man die kompakte Darstellung:

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{r} \tag{1}$$

Eventuell sind noch Anfangswerte zu berücksichtigen: $y_i(a) = \alpha_i, i = 1, \dots, n$, kompakter:

$$\vec{y}(a) = \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Beispiel: 3.1 Linear homogenes System:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 + y_2 & y_1(0) &= 1 \\y_2' &= y_1 - y_2 & y_2(0) &= 0\end{aligned} \tag{2}$$

1. Methode: Überführung von (2) in eine lineare DGL 2.-ter Ordnung und Lösung dieser DGL mit den Methoden des vorigen Kapitels. Hierzu: Addition der beiden Gleichungen: $y_1' + y_2' = 2y_1$ Differentiation der ersten Gleichung: $y_1' + y_2' = y_1''$, Einsetzen von

3. Lineare Systeme erster Ordnung

$y_2' = 2y_1 - y_1'$ führt auf $y_1'' - 2y_1' = 0$, das charakteristische Polynom ist $P_n(\lambda) = \lambda^2 - 2 = 0$ und das führt auf die Lösung $y_1(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}$. Damit ist $y_1'(x) = \sqrt{2}c_1 e^{\sqrt{2}x} - \sqrt{2}c_2 e^{-\sqrt{2}x}$. Einsetzen führt auf $y_2(x) = y_1'(x) - y_1(x) = (\sqrt{2} - 1)c_1 e^{\sqrt{2}x} - (\sqrt{2} + 1)c_2 e^{-\sqrt{2}x}$. Durch Einsetzen der Anfangswerte bestimmt man die Konstanten: $c_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, $c_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

2. Methode: Direkte Methode (weiter hinten wird diese Methode allgemein behandelt): (2) vektoriell geschrieben:

$$\vec{y}_1' = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{=:A} \vec{y}, \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Ansatz:

$$\vec{y}(x) = \vec{v} e^{\lambda x}, \quad \vec{v} = \text{konstanter Vektor} \quad (4)$$

Eingesetzt in (3) :

$$\begin{aligned} \vec{v} \lambda e^{\lambda x} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{v} e^{\lambda x} \\ \lambda \vec{v} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{v} \end{aligned}$$

d. h. \vec{v} ist Eigenvektor zum Eigenwert λ der Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Ermittlung der Eigenwerte: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1) - 1$

Bzw. $\lambda^2 - 2 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, also $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$.

14.05.2003

Ermittlung der Eigenvektoren zu den Eigenwerten mittels:

$$\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}v_1 &= v_1 + v_2 \Leftrightarrow (1 - \sqrt{2})v_1 + v_2 = 0 \\ \sqrt{2}v_2 &= v_1 - v_2 \Leftrightarrow -(-1 + \sqrt{2})v_2 + v_1 = 0 \end{aligned}$$

Multiplikation der zweiten Gleichung mit $(1 - \sqrt{2})$ führt auf $(1 - \sqrt{2})v_1 + v_2$, also sind die beiden Gleichungen linear abhängig. Eine Lösung ist: $v_1 = c_1$, $v_2 = (\sqrt{2} - 1)c_1$

$\lambda_2 = -\sqrt{2}$: In der gleichen Weise berechnet man die zweite Lösung: $v_1 = c_2$, $v_2 = -(\sqrt{2} + 1)c_2$.

3.1. DGI-Systeme erster Ordnung mit variablen Koeffizienten

Die Lösung des homogenen Systems ist also:

$$\vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} e^{\sqrt{2}x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} e^{-\sqrt{2}x}$$

Mit der Anfangsbedingung für $x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ (\sqrt{2} - 1)c_1 - (\sqrt{2} + 1)c_2 \end{pmatrix}$$

liefert die gleichen Ergebnisse, wie die erste Methode.

3.1. DGI-Systeme erster Ordnung mit variablen Koeffizienten

In diesem Abschnitt werden DGI-Systeme der folgenden Art betrachtet:

$$\begin{aligned} y_1' &= \sum_{k=1}^n a_{1,k}(x)y_k(x) + r_1(x) \\ y_2' &= \sum_{k=1}^n a_{2,k}(x)y_k(x) + r_2(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= \sum_{k=1}^n a_{n,k}(x)y_k(x) + r_n(x) \end{aligned} \quad ; \quad a_{i,k}, r_k \in C[a, b] \quad 1$$

Mit den Bezeichnungen

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1}(x), \dots, a_{1,n}(x) \\ \vdots \\ a_{n,1}(x), \dots, a_{n,n}(x) \end{bmatrix}, \vec{r}(x) = \begin{pmatrix} r_1(x) \\ \vdots \\ r_n(x) \end{pmatrix}$$

läßt sich das System (1) auf die Form

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{r} \quad 2$$

bringen. Für das AWP erhält man:

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{r}, \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \quad (3)$$

Satz 3.1 Das AWP (3) besitzt auf $C[a, b]$ genau eine Lösung.

Beweis: Es kann gezeigt werden, dass $f(x, \vec{y}) := A\vec{y} + \vec{r}$ einer Lipschitz Bedingung bzgl. \vec{y} genügt. Dann folgt der Beweis aus einem späteren Satz. ■

3. Lineare Systeme erster Ordnung

3.1.1. Algebraische Theorie dieser Systeme

Das homogene System

$$\vec{y}' = A\vec{y} \quad (4)$$

Definition 3.1 Die n auf dem Intervall $[a, b]$ definierten Vektorfunktionen $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ heißen auf $[a, b]$ **linear abhängig**, wenn es Skalare c_1, \dots, c_n , gibt, mit $\sum |c_k| \neq 0$, so dass $\sum_{k=1}^n c_k \vec{y}_k(x) \equiv \vec{0} \forall x \in [a, b]$ gilt. Andernfalls heißen die Funktionen **linear unabhängig**.

Definition 3.2 n auf $C[a, b]$ linear unabhängige Lösungen y_1, \dots, y_n des homogenen Systems (4) heißen ein **Fundamentalsystem** (Abkürzung: FS).

Satz 3.2 Die Lösungen des AWP

$$\vec{y}_k' = A\vec{y}_k, \quad \vec{y}_k(x_0) = e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ k-ter Einheitsvektor}$$

bilden ein FS.

Beweis: Der vorige Satz sagt aus: Jedes AWP besitzt eine eindeutige Lösung. Damit ist (5) eindeutig lösbar. Aus der Beziehung $\sum_{k=1}^n c_k y_k(x) \equiv \vec{0} \quad \forall x \in [a, b]$ folgt für $x = x_0$

$$\sum_{k=1}^n c_k \vec{y}_k(x_0) = \sum_{k=1}^n c_k \vec{e}_k = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} =: \vec{c} \\ \equiv \vec{0}$$

folgt $c_1 = \dots = c_n = 0$, also sind die $y_k(x)$ linear unabhängig. ■

Definition 3.3 Die Funktionen $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ mögen Lösungen des homogenen Systems $\vec{y}' = A\vec{y}$ sein, dann heißt die $n \times n$ -Matrix

$$W(x; \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n) := [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n]$$

(die Vektoren $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ als Spalten der Matrix) **Wronski-Matrix** dieses Systems. Analog heißt die Determinante der Wronski-Matrix dann **Wronski-Determinante**.

3.1. DGL-Systeme erster Ordnung mit variablen Koeffizienten

Satz 3.3 Die Wronski Determinante eines Systems von n Lösungen des DGL-Systems $\vec{y}' = A\vec{y}$ ist auf $[a, b]$ entweder identische 0 oder stets $\neq 0$. Im ersten Fall sind die Lösungen linear abhängig, im zweiten Fall linear unabhängig, bilden also ein FS.

Bemerkung:

- y_1, \dots, y_n seien Lösungen des lineare DGL. mit konstanten Koeffizienten: $Ly = 0$. Dann heißt die Matrix

$$W(x; y_1, \dots, y_n) := \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

ebenfalls Wronski-Matrix zu $Ly = 0$

- Die Determinante ist nur an einer Stelle $x_0 \in [a, b]$ auszuwerten, da sie entweder auf ganz $[a, b]$ verschwindet, oder nirgendwo auf $[a, b]$ verschwindet. Geschickte Wahl von x_0 macht die Berechnung einfacher.
- Für die Matrix W bedeutet dies, W besitzt in jedem Punkt von $[a, b]$ eine Inverse W^{-1} , oder in keinem Punkt!

Satz 3.4 $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ seien ein FS von (4) und \vec{y}^* sei eine beliebige Lösung, dann existieren eindeutig bestimmte Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ mit $\vec{y}^* = \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{y}_k$.

Das inhomogene System

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{r} \tag{7}$$

Es gilt wieder das Superpositionsprinzip: Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems (7) setzt sich additiv aus der allgemeinen Lösung des homogenen Systems und einer beliebigen Lösung des inhomogenen Systems zusammen.

- Es sei $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ ein FS des homogenen Systems (Konstruktion im nächsten Kapitel), dann besitzt die allgemeine Lösung dieses Systems die Form:

$$\vec{y}_h(x) = \sum_{k=1}^n c_k \vec{y}_k(x) \tag{8}$$

mit freien Konstanten c_1, \dots, c_n , die gegebenenfalls durch Anfangsbedingungen festgelegt werden können.

3. Lineare Systeme erster Ordnung

- Konstruktion einer beliebigen Lösung des inhomogenen Systems: $W(x) = [\vec{y}_1 \ \dots \ \vec{y}_n]$, wobei $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ dem obigen FS entstammen. Dann gilt $\vec{y}_k' = A\vec{y}_k$ und damit spaltenweise interpretiert:

$$W'(x) = AW(x)$$

Mit einer auf $[a, b]$ diffbaren Funktion $\vec{z}(x)$ machen wir den Ansatz (Variation der Konstanten):

15.05.200

$$\begin{aligned} \vec{y}(x) &= W(x)\vec{z}(x) \quad \text{Es folgt:} \\ \vec{y}'(x) &= W'(x)\vec{z}(x) + W(x)\vec{z}'(x) \\ &= \underbrace{AW(x)\vec{z}(x)}_{=\vec{y}(x)} + W(x)\vec{z}'(x) \\ &= A\vec{y}(x) + W(x)\vec{z}'(x) \\ &\stackrel{(7)}{=} A\vec{y}(x) + \vec{r}(x) \end{aligned}$$

Hieraus folgt $W(x)\vec{z}'(x) = \vec{r}(x)$ bzw. $\vec{z}'(x) = W^{-1}(x)\vec{r}(x)$ und damit

$$\vec{z}(x) = \vec{z}(x_0) + \int_{x_0}^x W^{-1}(t)\vec{r}(t)dt$$

Interpretiert man $\vec{z}(x_0)$ als Vektor mit den freien Koeffizienten c_1, \dots, c_n , so erhält man die Lösung des inhomogenen Systems zu:

$$\vec{y} = W(x_0)\vec{z}(x_0) + W(x) \int_{x_0}^x W^{-1}(t)\vec{r}(t)dt \quad (9)$$

Bemerkung:

Die Erfüllung der Anfangsbedingung (Abkürzung: **ABn**) $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$ führt in dieser Darstellung der Lösung auf $\vec{y}(x_0) = W(x_0)\vec{z}(x_0) = \vec{y}_0$.

Beispiel: 3.2 $n = 2$

$$\begin{aligned} \vec{y}' &= \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ -12x & \end{bmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} e^{x^2} \\ e^{x^2} \end{pmatrix} \\ &= A\vec{y} + \vec{r} \end{aligned}$$

Zur Lösung des zugehörigen homogenen Systems machen wir die Transformation: $\vec{y}(x) = e^{x^2}\vec{v}$, es wird $\vec{y}'(x) = e^{x^2}(\vec{v}'(x) + 2x\vec{v}(x))$, also

$$\begin{aligned} e^{x^2}(\vec{v}'(x) + 2x\vec{v}(x)) &= Ae^{x^2}\vec{v}(x) \quad \text{d.h.} \\ \vec{v}'(x) &= (A - 2xE)\vec{v}(x) \quad E \text{ Einheitsmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{v}(x) \end{aligned}$$

3.1. DGL-Systeme erster Ordnung mit variablen Koeffizienten

Mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ folgt komponentenweise $v_1'(x) = v_2(x)$, $v_2'(x) = -v_1(x)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow v_1''(x) = v_2' = -v_1(x) \\ &\Rightarrow v_1''(x) + v_1(x) = 0 \\ &\leadsto \lambda^2 + 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm i \\ &v_{1,1}(x) = \cos x, \quad v_{1,2} = \sin x \\ &\text{weiter } v_{2,1}(x) = v_{1,1}' = -\sin x \\ &\quad v_{2,2}(x) = v_{1,2}' = \cos x \\ &\text{bzw.: } v_1(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}, \quad v_2(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösung des ursprünglichen Systems

$$y_1(x) = e^{x^2} \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}, \quad y_2(x) = e^{x^2} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

Zugehörige Wronski Matrix:

$$\begin{aligned} W(x, y_1, y_2) &= e^{x^2} \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \\ \text{mit } \det(W(x, y_1, y_2)) &= e^{x^2} (\cos^2 x + \sin^2 x) = e^{x^2} > 0 \end{aligned}$$

d.h. y_1, y_2 sind linear unabhängig. Insbesondere ist $W^{-1} = e^{-x^2} \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$.

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems zu

$$\begin{aligned} \vec{y} &= e^{x^2} \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \int_{x_0}^x e^{-t^2} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ e^{t^2} \end{pmatrix} dt \right) \\ &= e^{x^2} \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin x + \cos x - \sin x_0 - \cos x_0 \\ -\cos x + \sin x + \cos x_0 - \sin x_0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

3.1.2. Konstruktion eines Fundamentalsystems

Einschub: Exponentialmatrix

Wie gesehen besitzt die homogenen DGL. erster Ordnung $y'(x) = a(x)y(x)$ die allgemeine Lösung $y(x) = ce^{b(x)}$, wobei $b(x)$ Stammfunktion von a ist:

$$y'(x) = cb'(x)e^{b(x)} = y(x)a(x)$$

3. Lineare Systeme erster Ordnung

Gibt es eine Verallgemeinerung für das homogene System:

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) \quad (1)$$

Es sei $B = (b_{i,k})$ eine $(n \times n)$ -Matrix. Für $n \geq 1$ gelte:

$$S_N = E + B + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \dots + \frac{B^N}{N!}$$

Schreibweise: $B^0 := E$ insbesondere $\|B^0\| = \|E\| = 1$, $B^\rho = (b_{i,k}^{(\rho)})$. Man kann zeigen der Grenzwert $\lim_{N \rightarrow \infty} S^N$ existiert. Er heißt **Exponentialmatrix**:

$$e^B := \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{B^\rho}{\rho!}$$

Beispiel: 3.3 $n = 2$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ mit $B^\rho = \begin{pmatrix} 2^{2\rho-1} + 2^{\rho-1} & 2^{2\rho-1} - 2^{\rho-1} \\ 2^{2\rho-1} - 2^{\rho-1} & 2^{2\rho-1} + 2^{\rho-1} \end{pmatrix}$ für $\rho = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} e^B &= \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{B^\rho}{\rho!} = \begin{pmatrix} \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{2^{2\rho-1} + 2^{\rho-1}}{\rho!} & \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{2^{2\rho-1} - 2^{\rho-1}}{\rho!} \\ \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{2^{2\rho-1} - 2^{\rho-1}}{\rho!} & \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{2^{2\rho-1} + 2^{\rho-1}}{\rho!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{2}e^2 & \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^2 \\ \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^2 & \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{2}e^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}e^2 \begin{bmatrix} e^2 + 1 & e^2 - 1 \\ e^2 - 1 & e^2 + 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Verifizierung für die erste Komponente:

$$\sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{2^{2\rho-1}}{\rho!} = \frac{1}{2} \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{(2^2)^\rho}{\rho!} = \frac{1}{2}e^{2^2} = \frac{1}{2}e^4$$

Bemerkung:

Es ist im allgemeinen nicht einfach, die Potenzen von B zu bilden. Für **konstante** Matrizen B empfiehlt sich oft das folgende Verfahren:

Man suche eine nichtsinguläre Matrix T mit $TBT^{-1} = D$ (mit einer Diagonalmatrix D). Das ist nicht immer möglich, aber stets für reelle symmetrische B . Dann wird

$$\begin{aligned} B &= T^{-1}DT \\ B^2 &= T^{-1}DTT^{-1}DT = T^{-1}D^2T \text{ und allgemein} \\ B^\rho &= T^{-1}D^\rho T \end{aligned}$$

Somit ist:

$$\begin{aligned} e^B &= \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{B^\rho}{\rho!} = \sum_{\rho=0}^{\infty} \left(T^{-1} \frac{D^\rho}{\rho!} T \right) = T^{-1} \left(\sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{D^\rho}{\rho!} \right) T \\ &= T^{-1}e^D T \end{aligned}$$

3.2. Lineare DGI-Systeme mit konstanter Koeffizienten Matrix

es ist aber

$$e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

21.05.2003

Beispiel: 3.4 $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ Eigenwerte von b : $\det \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 1$

$$\begin{aligned} (3 - \lambda)^2 - 1 &= l^2 - 6\lambda + 8 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= 3 \pm \sqrt{1} \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 4, \quad \lambda_2 = 2, \quad \text{also:} \end{aligned}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Die Beziehung $TB = DT$ führt zu einem linearen Gleichungssystem für die Elemente von T . Es folgt $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ und $T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Somit wird

$$\begin{aligned} e^B &= T^{-1} \begin{bmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix} T \\ &= \frac{e^2}{2} \begin{bmatrix} e^2 + 1 & e^2 - 1 \\ e^2 - 1 & e^2 + 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Satz 3.5 Es sei $B(x)$ eine Matrix von Stammfunktionen zu der auf $[a, b]$ stetigen Matrix $A(x)$; d.h. B ist stetig diffbar auf $[a, b]$ und es gilt $B'(x) = A(x)$. Ferner gelte $\forall x \in [a, b] : AB = BA$, dann ist e^B Wronski Matrix zu einem Fundamentalsystem des DGI-Systems: $\vec{y}' = A\vec{y}$.

3.2. Lineare DGI-Systeme mit konstanter Koeffizienten Matrix

Gegeben sei das lineare System

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{r}(x) \tag{1}$$

mit konstanter $(n \times n)$ -Matrix A (Rang $A = n$) und $\vec{r} = \vec{r}(x)$

Ein FS ist gegeben durch die Spalten der Exponentialmatrix e^{Ax} . Mit beliebigem Vektor $\vec{z}(x_0) = (c_1, \dots, c_n)^t =: \vec{c}$ ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGI. gegeben durch $\vec{y}(x) = W(x)\vec{z}(x_0) + W(x) \int_{x_0}^x W^{-1}(t)\vec{r}(t)dt$ und hier insbesondere $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$.

3. Lineare Systeme erster Ordnung

$$\vec{y}(x) = \vec{c}e^{Ax} + \int_{x_0}^x e^{(x-t)A} \vec{r}(t) dt \quad (2)$$

Gilt $AB = BA$? $A \underbrace{Ax}_B = AxA = AAx$

Betrachte das homogene System:

$$\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x) \quad (3)$$

Früherer Ansatz:

$$\vec{y}(x) = e^{\lambda x} \vec{v} \quad \text{mit konstantem } \vec{v} \text{ und } \lambda \quad (4)$$

Es folgt $\vec{y}'(x) = \lambda e^{\lambda x} \vec{v} = A\vec{y} = Ae^{\lambda x} \vec{v}$, also

$$(A - \lambda E)\vec{v} = 0 \quad (5)$$

Ist also λ Eigenwert von A und sei \vec{v} der zugehörige Eigenvektor, so ist $\vec{y}(x) = e^{\lambda x} \vec{v}$ eine Lösung des Systems (3).

Satz 3.6 Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die nicht notwendigerweise verschiedenen Eigenwerte von A . Existiert ein vollständiges System von Eigenvektoren (d.h. ex. lineare unabhängige EV $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ mit v_i ist EV zu EW λ_i), so bilden die Funktionen

$$\vec{y}_k(x) = e^{\lambda_k x} \vec{v}_k, \quad k = 1, \dots, n$$

ein FS der DGI (3)

λ_1 habe z.B. die Vielfachheit r und dazu r linear unabhängige EV $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$: $e^{\lambda_1 x} \vec{v}_1, \dots, e^{\lambda_1 x} \vec{v}_r$

Beispiel: 3.5 1. $\vec{y}' = A\vec{y}$, mit $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

Bestimmung der EW: $\det(A - \lambda E) = (7 - \lambda)(1 - \lambda^2)$ liefert $\lambda_1 = 7$ und $\lambda_{2,3} = 1$

Bestimmung der EV:

$\lambda_1 = 7$: Der Ansatz $(A - \lambda_1 E)\vec{v} = \vec{0}$ führt auf $v_1 + 5v_2 + 2v_3 = 0 \wedge 2v_2 + v_3 = 0$,
z.B.: $v_2 = 1, \quad v_3 = -2, \quad v_1 = -1$

$$\Rightarrow \vec{y}_1(x) = e^{7x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3.2. Lineare DGI-Systeme mit konstanter Koeffizienten Matrix

$\lambda_{2,3}$: Der Ansatz: $(A - \lambda_{2,3}E)\vec{w} = \vec{0}$ führt zu $w_1 - w_2 + 2w_3 = 0$, zwei linear unabhängige Lösungen sind:

$$\vec{w}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung zu :

$$y(x) = c_1 e^{7x} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} + e^x \left(c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

2.

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -3 \end{bmatrix} \vec{y}$$

Bestimmung der EW mittels charakt. Polynom $-\lambda^3 + 3\lambda - 2$ mit $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = 1$
Bestimmung der EV mit dem Ansatz $(A - \lambda_i)\vec{v}_i = \vec{0}$ führt z.B. zu

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-2x}$$

Zu $\lambda_{2,3}$ läßt sich nur ein linear unabhängiger EV konstruieren:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Betrachte deswegen: $(A - \lambda_{2,3}E)^2 \vec{w} = \vec{0}$. Dieser Ansatz führt auf 2 linear unabhängige Lösungen: $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Lösungen ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} \vec{y}_{i+1} &= e^{\lambda x} \sum_{j=0}^1 \frac{(A - \lambda E)^j}{j!} \vec{w}_i x^j, \quad i = 1, 2 \\ &= e^x \sum_{j=0}^1 \frac{(A - E)^j}{j!} \vec{w}_i x^j \\ &= e^x (\vec{w}_i + (A - E)\vec{w}_i x) \end{aligned}$$

3. Lineare Systeme erster Ordnung

i=1:

$$\begin{aligned}(A + E)\vec{w}_1 &= \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{y}_2(x) &= e^x \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} x \right)\end{aligned}$$

i=2:

$$\begin{aligned}(A - E)\vec{w}_2 &= \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow y_3(x) &= e^x \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} x \right)\end{aligned}$$

Bemerkungen:

a) Wir erhalten mit diesem Ansatz tatsächlich Lösungen: z.B:

$$\begin{aligned}y_3' &= e^x \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^x \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} x \right) \\ &\stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -3 \end{bmatrix} \left(e^x \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} x \right) \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} x \right) e^x \Rightarrow y_3 \text{ ist eine Lösung}\end{aligned}$$

b) Es sind tatsächlich linear unabhängige Lösungen, hierzu berechnen wir die Wronski Determinante an der Stelle $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}|y_1(0), y_2(0), y_3(0)| &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 16 - 3 - 4 = 9 \neq 0\end{aligned}$$

3.2. Lineare DGI-Systeme mit konstanter Koeffizienten Matrix

Allgemeine homogene Lösung ist:

$$\vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-2x} + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x)$$

Satz 3.7 Es sei λ Eigenwert von A mit der Vielfachheit $k \geq 1$. Dann besitzt das Lineare Gleichungssystem $(A - \lambda E)^k \vec{v} = \vec{0}$ k linear unabhängige Lösungen $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ und die linear unabhängigen Funktionen

$$y_i(x) = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(A - \lambda E)^j}{j!} \vec{v}_i x^j \quad i = 1, \dots, k$$

genügen dem System $\vec{y}' = A\vec{y}$. (\vec{v}_i zum EW λ heißt **Hauptvektor**)

3. Lineare Systeme erster Ordnung

4. Existenz und Eindeutigkeit bei AWP

AWP:

Es sei $f = f(x, y)$ gegeben auf einem Gebiet D der x, y -Ebene. Und es sei $(\xi, \eta) \in D$. Gesucht ist eine auf $[a, b]$ diffbare Funktion $y = y(x)$ mit

1. $y' = f(x, y) \quad \forall x \in [a, b]$
2. $y(\xi) = \eta$

Beispiel: 4.1 Betrachte das AWP: $y' = y + 1 - x, \quad y(0) = 2$.

Es kann gezeigt werden: die Kurvenschar $y(x) = y + ce^x, \quad c \in \mathbb{R}$ erfüllt die DGL. Aus der Anfangsbedingung (Abkürzung AB) $y(0) = 0 + c \cdot 1 \stackrel{!}{=} 2$ bestimmt man $c = 2$. Die eindeutige Lösung des AWP ist $y(x) = x + 2e^x$.

4.1. Funktionalanalytische Hilfsmittel

Definition 4.1 Eine Menge $L = \{a, b, c, \dots\}$ wird **lineare Raum** genannt, wenn in L eine Addition und eine Multiplikation mit Skalaren definiert ist:

- $\forall a, b \in L : a + b \in L$
- $a \in L, \lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{C} \Rightarrow \lambda a \in L$

und es sind folgende Regeln erfüllt:

Regeln der Addition

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$
2. $a + b = b + a$
3. $\exists 0 : 0 + a = a \quad \forall a \in L$
4. $\forall a \in L : \exists -a : a + (-a) = 0$

4. Existenz und Eindeutigkeit bei AWP

Regeln der skalaren Multiplikation

1. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$
2. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$
3. $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$
4. $1a = a$

Definition 4.2 Sei L ein linearer Raum, eine Funktion $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}$ mit

1. $\|a\| \geq 0$ und $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2. $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$
3. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ (**Dreiecksungleichung**)

heißt **Norm auf L** und L heißt dann **normierter Raum**.

04.06.2003

Folgerungen:

- $\|f_1 + \dots + f_n\| \leq \|f_1\| + \dots + \|f_n\|$
- Jede Norm induziert auf L einen Abstand **Metrik** vermöge $\delta(f, g) := \|f - g\| \forall f, g \in L$ mit
 - $\delta(f, g) = \delta(g, f) > 0$ für $f \neq g$
 - $\delta(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$
 - $\delta(f, h) \leq \delta(f, g) + \delta(g, h)$

Ein Raum mit einer Metrik heißt **metrischer Raum**

Beispiel: 4.2 1. Der n -dimensionale Raum \mathbb{R}^n :

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \vec{a} \mid \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

mit komponentenweiser Addition und komponentenweiser skalarer Multiplikation.
(Analog: \mathbb{C}^n)

Normierungen: z.B

- $\|a\|_1 := \sqrt{\sum a_k^2}$ (euklidische Norm)
- $\|a\|_2 := \sum |a_k|$ (Betragssummen Norm)
- $\|a\|_3 := \max |a_k|$ (Betragsmaximums Norm)

2. $G \subset \mathbb{R}^n$ sei eine kompakte Menge, $C(G)$ ist die Menge aller auf G stetigen reellwertigen Funktionen $f = f(x_1, \dots, x_n)$ mit punktweiser Addition $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und punktweiser skalarer Multiplikation $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. G ist ein linearer Raum, z.B. mit der Tschebyscheff-Norm oder l_∞ -Norm $\|f\| := \max_{x \in G} |f(x)|$

Definition 4.3 Eine Folge $(x_k) \subset L$ konvergiert (nach der Norm) gegen ein Element x , wenn $\|x_k - x\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. Analog $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x \iff \left\| \sum_{k=1}^N x_k - x \right\| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$

Definition 4.4 Eine Folge (x_k) heißt **Cauchy-Folge**, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein N gibt, mit $\|x_n - x_m\| < \epsilon \forall n, m > N$

Bemerkung:

In \mathbb{R} und \mathbb{C} konvergiert jede Cauchy-Folge, das ist in beliebigen linearen Räumen nicht richtig.

Definition 4.5 Ein linearer normierter Raum M heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge von Elementen aus M einen Grenzwert in M besitzt.

Definition 4.6 Ein linearer normierter vollständiger Raum heißt **Banachraum**.

Beispiel: 4.3 • \mathbb{R}^n mit $\|\cdot\|_k$, $k = 1, 2, 3$ ist Banachraum.

- $C(G)$ mit der Tschebyscheff Norm ist Banachraum.

Es seien E, F reelle (komplexe) normierte Räume. Weiter sei $D \subset E$ linearer Unterraum von E und $T : D \rightarrow F$ eine Funktion. T heißt **Operator** bzw für $F = \{\mathbb{R}\}$ (oder \mathbb{C}) heißt T **Funktional**.

Definition 4.7 Ein Operator $T : D \rightarrow F$ heißt **linear**, falls

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \quad \forall x, y \in D \text{ und } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C})$$

Ein Operator $T : D \rightarrow F$ heißt **stetig** in $x \in D$, falls aus $x_k \in D$ und $x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x$ folgt $T(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} T(x)$.

Definition 4.8 Ein Operator $T : D \rightarrow F$ genügt in D einer **Lippschitz Bedingung** (mit der Lippschitz-Konstanten L), wenn für $x, y \in D$ gilt:

$$\|Tx - Ty\|_F \leq L \cdot \|x - y\|_E$$

Bemerkung:

- Im Allgemeinen ist $E = F$ und die Normen sind damit gleich

4. Existenz und Eindeutigkeit bei AWP

- T genügt einer Lipschitz Bedingung $\Rightarrow T$ ist stetig, denn

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x \Rightarrow 0 \leq \|Tx - Ty\| \leq L \underbrace{\|x - y\|}_{\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0}$$

Also $\|Tx_k - Tx\| \rightarrow 0$, d.h. $Tx_k \rightarrow Tx$ für $k \rightarrow \infty$.

Beispiel: 4.4 $D = E = C[a, b]$, $F = \mathbb{R}$ und $T : D \rightarrow F$ mit $Tf := \int_a^b f(t)dt$, Tschebyscheff Norm:

- T ist lineare Funktional:

$$\begin{aligned} T(\lambda f + \mu g) &= \int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt \\ &= \lambda Tf + \mu Tg \end{aligned}$$

- T genügt einer Lipschitz Bedingung mit $L = (b - a)$:

$$\begin{aligned} \|Tf - Tg\| &= \left\| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt \right\| = \left\| \int_a^b (f - g)dt \right\| \\ &\leq \int_a^b \|f - g\| dt = \underbrace{(b - a)}_{=L} \|f - g\| \end{aligned}$$

05.06.2003

Satz 4.1 (Fixpunktsatz von Banach) Sei B ein Banachraum, $\emptyset \neq D \subset B$ sei abgeschlossen, $T : D \rightarrow D$ sei ein Operator und genüge einer Lipschitzbedingung mit einer Konstanten $0 \leq L < 1$ (T ist **kontrahierend**)

$$\|Tx - Ty\| \leq L \|x - y\| \quad \forall x, y \in D \text{ und } 0 \leq L < 1 \quad (3)$$

Dann besitzt T in D genau einen Fixpunkt \bar{x} (also ein $\bar{x} \in D$ mit $T\bar{x} = \bar{x}$)

Weiter konvergiert die Folge

$$x_0 \in D, \quad x_{k+1} = Tx_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

gegen diesen Fixpunkt \bar{x} . Es gilt die Fehlerabschätzung

$$\|\bar{x} - x_k\| < \frac{L^k}{1 - L} \|x_1 - x_0\|$$

Beweis:

1. Eindeutigkeit: Annahme: es gebe 2 Punkte $x, y \in D$ mit $x = Tx, y = Ty$:

$$(3) \Rightarrow \|x - y\| = \|Tx - Ty\| \leq L \|x - y\|$$

mit $0 \leq L < 1$ ist die Ungleichung nur richtig für $\|x - y\| = 0 \iff x = y$

2. $T : D \rightarrow D$ bzw. $T(D) \subset D$, d.h. aus $x_k \in D$ folgt $x_{k+1} = Tx_k \in D$, also $(x_k) \in D$

3. Konvergenz der Folge (x_k) : Es gilt

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq L^k \|x_1 - x_0\|, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Denn (Induktion):

$$k = 0 : \|x_1 - x_0\| \leq L^0 \|x_1 - x_0\| \quad \text{ok}$$

$$i \leq k : \text{ok} \quad i = k + 1 :$$

$$\|x_{k+2} - x_{k+1}\| = \|Tx_{k+1} - Tx_k\| \leq L \|x_{k+1} - x_k\| \stackrel{\text{I.A.}}{\leq} L^{k+1} \|x_1 - x_0\|$$

Hiermit folgt für $\rho \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|x_{k+\rho} - x_k\| &= \|(x_{k+1} - x_k) + (x_{k+2} - x_{k+1}) + \dots + (x_{k+\rho} - x_{k+\rho-1})\| \\ &\leq \|x_{k+1} - x_k\| + \dots + \|x_{k+\rho} - x_{k+\rho-1}\| \\ &\stackrel{(6)}{\leq} \|x_1 - x_0\| (L^k + L^{k+1} + \dots + L^{k+\rho-1}) \\ &= \|x_1 - x_0\| L^k (1 + L + \dots + L^{\rho-1}) \end{aligned}$$

$$\text{wegen } 0 \leq L < 1 : \leq L^k \left(\sum_{j=0}^{\infty} L^j \right) \|x_1 - x_0\| = \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\|$$

d.h. (x_k) ist eine Cauchy-Folge, B ist ein Banachraum $\Rightarrow (x_k)$ konvergiert!

4. B Banachraum $\Rightarrow (x_k)$ besitzt den eindeutigen Grenzwert $\bar{x} \in B$. \bar{x} ist aber Fixpunkt von T :

$$\left. \begin{array}{l} x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{x} \\ x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{x} \end{array} \right\} \xrightarrow{T \text{ stetig}} \begin{array}{l} Tx_k \longrightarrow T\bar{x} \\ = \implies = \\ Tx_{k+1} \longrightarrow \bar{x} \end{array}$$

also $\bar{x} = T\bar{x}$

5. Aus (3.) folgt insbesondere $\|x_{k+p} - x_k\| \leq L^k \sum_{j=0}^{p-1} L^j \|x_1 - x_0\|$, $p \rightarrow \infty$:
 $x_{k+p} \rightarrow \bar{x}$, $\sum_{j=0}^{\infty} L^j \rightarrow \frac{1}{1-L}$, also $\|\bar{x} - x_k\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\|$

4.2. Der Existenz und Eindeutigkeitssatz

(Die Funktionen seien reellwertig.)

Betrachte das AWP:

$$(1) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(\xi) = \eta \end{cases} \quad \xi \leq x \leq \xi + a$$

Satz 4.2 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz v. Picard Lindelöf) Die Funktion $f = f(x, y)$ sei in dem Streifen $S : \xi \leq x \leq \xi + a, -\infty < y < \infty$ stetig und genüge in S einer Lipschitzbedingung bzgl. y :

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|, \quad L \geq 0 \quad (2)$$

Dann besitzt das AWP (1) genau eine Lösung $y = y(x)$ auf $[\xi, \xi + a]$.

Beweis:

- L unterliegt keiner Einschränkung, z.B. $y' = f(x, y) = 1 + 2x + 3y$

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| = |1 + 2x + 3y - 1 - 2x - 3\tilde{y}| = \underbrace{3}_{=L} |y - \tilde{y}|$$

- y' stetig in $x \Rightarrow f(x, y)$ stetig in x . $f(x, y)$ genügt einer Lipschitzbedingung bzgl. $y \Rightarrow f$ stetig bzgl. y .
- Das AWP (1) ist äquivalent zu der Integralgleichung

$$y(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t, y(t)) dt \quad (3)$$

Denn (3) \Rightarrow (1): Ableiten von (3) nach x

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\eta + \int_{\xi}^x f(t, y(t)) dt \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_{\xi}^{x+h} f(t, y(t)) dt - \int_{\xi}^x f(t, y(t)) dt \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_x^{x+h} f(t, y(t)) dt \right) \end{aligned}$$

$$\text{MWS d. Int.-rechnung:} \quad = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} h f(\alpha, y(\alpha)) \quad \text{mit } x \leq \alpha(h) \leq x + h$$

$$\text{d.h. } \alpha(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} x = f(x, y(x))$$

$$\text{und } y(\xi) = \eta + \int_{\xi}^{\xi} f(t, y(t)) dt = \eta$$

(1) \longrightarrow (3): Die DGL. in (1) integrieren über $[\xi, x]$

$$\int_{\xi}^x y'(t)dt = y(x) - y(\xi) \stackrel{!}{=} \int_{\xi}^x f(t, y(t))dt$$

$$\text{wg. } y(\xi) = \eta \Rightarrow y(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t, y(t))dt$$

Äquivalente Formulierung des Ausgangsproblems: $[\xi, \xi + a] \subset \mathbb{R}^1$ kompakt, gezeigt: $C[\xi, \xi + a]$ mit der Tschebyscheff Norm ist Banachraum.

Def. einen Operator: $T : C[\xi, \xi + a] \longrightarrow C[\xi, \xi + a]$ für $y \in C[\xi, \xi + a]$ vermöge

$$Ty(x) := \eta + \int_{\xi}^x f(t, y(t))dt \tag{4}$$

Bemerkung:

Es ist tatsächlich $Ty \in C[\xi, \xi + a]$, denn

$$Ty(x) - Ty(\tilde{x}) = \eta + \int_{\xi}^x f(t, y(t))dt - \eta - \int_{\xi}^{\tilde{x}} f(t, y(t))dt$$

$$= \int_{\tilde{x}}^x f(t, y(t))dt$$

f ist stetig in t und $y \xrightarrow{\text{Cauchy}}$ Behauptung.

T genügt einer Lipschitz Bedingung

$$|Ty(x) - Tz(x)| = \left| \eta + \int_{\xi}^x f(t, y(t))dt - \eta - \int_{\xi}^x f(t, z(t))dt \right| = \left| \int_{\xi}^x f(t, y(t)) - f(t, z(t))dt \right|$$

$$\stackrel{(2)}{\leq} \underbrace{(x - \xi)}_{= \int_{\xi}^x 1dt} L |y - z| \leq_{\xi \leq x \leq \xi + a} aL |y - z|$$

Fallunterscheidung

$aL < 1$: , d.h. $a < \frac{1}{L} \rightsquigarrow$ mit dem Fixpunktsatz folgt die Behauptung

$a \geq \frac{1}{L}$: definiere ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $b := \frac{a}{n} < \frac{1}{L}$ ist. Nun greift in jedem Intervall $[\xi, \xi + b]$, $[\xi + b, \xi + 2b]$, \dots , $[\xi + (n - 1)b, \xi + nb]$ der erste Fall und es folgt die Behauptung für jedes einzelne Intervall.

■

4. Existenz und Eindeutigkeit bei AWP

Bemerkung:

Die Folge

$$y_0(x) := \eta; y_{k+1}(x) := \eta + \int_{\xi}^x f(t, y_k(t)) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

konvergiert gleichmäßig gegen die Lösung des AWP (1) : Das ist das Iterationsverfahren von **Picard-Lindelöf**, das aber im Allgemeinen numerisch nicht sinnvoll ist.

Beispiel: 4.5 AWP: $y' = x - y, y(0) = 1$, also insbesondere $f(t, y) = ty$

1. $y_0(x) = 1$

2. $y_1(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t, y_0) dt = 1 + \int_0^x t dt = 1 + \frac{x^2}{2}$

3. $y_2(x) = 1 + \int_0^x ty_1(t) dt = 1 + \int_0^x (t + \frac{t^3}{2}) dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}$

Satz 4.3 (Peano) Es sei $f = f(x, y)$ in einem Gebiet D stetig, dann geht durch jeden Punkt $(\xi, \eta) \in D$ mindestens eine Lsg der DGL $y' = f(x, y)$. Jede Lsg läßt sich bis zum Rand von D fortsetzen.

Diese Aussagen lassen sich sofort auf Systeme von DGL'n erster Ordnung verallgemeinern.: gegeben sei das AWP:

$$\vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}); \vec{y}(\xi) = \vec{\eta} \quad (7)$$

Es seien:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}(x, \vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, \vec{y}) \\ \vdots \\ f_n(x, \vec{y}) \end{pmatrix}, \int_a^b \vec{y}' dx = \begin{pmatrix} \int_a^b y_1(x) dx \\ \vdots \\ \int_a^b y_n(x) dx \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

(7) ist dann äquivalent mit

$$\vec{y}(x) = \vec{\eta} + \int_{\xi}^x \vec{f}(t, \vec{y}(t)) dt \quad (8)$$

4.2. Der Existenz und Eindeutigkeitsatz

Definition 4.9 Die Vektorfunktion $\vec{f}(x, \vec{y})$ genügt in $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ einer Lipschitz Bedingung bzgl. \vec{y} (mit der Konstanten L), wenn

$$\left\| \vec{f}(x, \vec{y}_1) - \vec{f}(x, \vec{y}_2) \right\| \leq L \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\| \quad \forall (x, \vec{y}_1), (x, \vec{y}_2) \in D$$

gilt.

Satz 4.4 Die Funktion $\vec{f}(x, \vec{y})$ sei in einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ stetig und genüge in D einer Lipschitz Bedingung bzgl. \vec{y} . Dann besitzt für $(\xi, \vec{\eta}) \in D$ das AWP

$$\vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}); \vec{y}(\xi) = \vec{\eta} \quad (9)$$

genau eine Lösung

Satz 4.5 (Peano) Ist $\vec{f}(x, \vec{y})$ stetig in einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ und ist $(\xi, \vec{\eta}) \in D$, so besitzt das AWP (9) mindestens eine Lösung in D .

4. Existenz und Eindeutigkeit bei AWP

Teil II.

**Numerik Gewöhnlicher
Differentialgleichungen**

5. Numerische Behandlung von AWP

5.1. Einschrittverfahren

Wir betrachten im folgenden das AWP

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

Bei Näherungsverfahren wird nicht versucht die Lösungsfunktion analytisch zu approximieren. Es werden für eine vorgegebene Schrittweite $h \neq 0$ Näherungswerte η_k für die exakten Werte $y_k := y(x_k)$ an den Stellen $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, 2, \dots$ berechnet.

Wir betrachten hier äquidistante Knoten. In der Praxis arbeitet man mit einer Schrittweitensteuerung: Hat man die Stützstellen x_k und x_{k+1} , so nimmt man $c := \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ hinzu und berechnet $y(x_k)$ einmal mit der weiteren Stützstelle c und einmal ohne diese. Weichen die Werte zu stark von einander ab, so verkleinert man die Intervalllänge.

5.1.1. Euler Verfahren

$$(2) \begin{cases} \eta_0 &= y_0 \\ \eta_{k+1} &= \eta_k + hf(x_k, \eta_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Geometrische Interpretation: Siehe auch Abbildung 5.1. Es ist $y'(x) = f(x, y(x))$ die Steigung der exakten Lösung $y(x)$ im Punkt x . Für $h \neq 0$ gilt näherungsweise $\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \approx y'(x)$ und damit $y(x+h) \approx y(x) + hy'(x) = y(x) + hf(x, y(x))$. Also folgt mit $x_k = x_0 + kh$ und $\eta_0 = y_0$ für die Näherungswerte η_k der Werte $y_k = y(x_k)$ der exakten Lösung an den äquidistanten Knoten x_k :

$$\eta(x_0 + h) = \eta(x_1) = \eta_1 = \eta_0 + hf(x_0, \eta_0)$$

$$\eta_2 = \eta_1 + hf(x_1, \eta_1)$$

$$\text{und damit allgemein: } \eta_{k+1} = \eta_k + hf(x_k, \eta_k) \quad (\text{Euler-Formel})$$

Beispiel: 5.1 Für $y' = (x - y)^2 + 1$, $y(0) = -1$ ergibt das Euler-Verfahren: $\eta_0 = y_0$, $\eta_{k+1} = \eta_k + hf(x_k, \eta_k)$ für $k = 0, 1, 2, \dots$ und mit $h = \frac{1}{4}$, $x_0 = 0, \eta_0 = y_0 = -1$ und $f(x_k, \eta_k) = (x_k - \eta_k) + 1$:

5. Numerische Behandlung von AWP

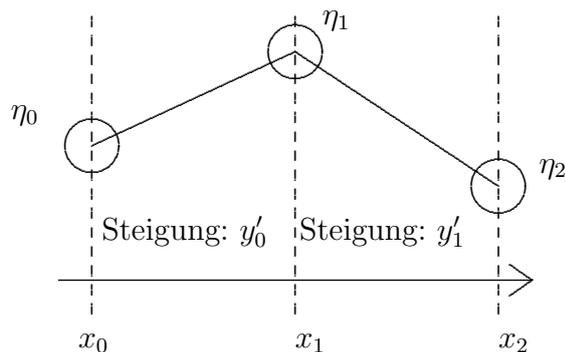


Abbildung 5.1.: Geometrische Interpretation des Euler-Verfahrens

Sei dazu $y'_k := f(x_k, \eta_k)$.

$k = 0$:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \eta_0 + hf(x_0, \eta_0) = \eta_0 + h \left((x_0 - \eta_0)^2 + 1 \right) \\ &= -1 + \frac{1}{4} \left((0 + 1)^2 + 1 \right) = -\frac{1}{2} = -0,5\end{aligned}$$

$k = 1$:

$$\eta_2 = \eta_1 + hf(x_1, \eta_1) = -0,5 + \frac{1}{4} \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right)^2 + 1 \right) = \frac{-7}{64} = -0,10938 \dots$$

$k = 3$:

$$\eta_3 = \eta_2 + h \left((x_2 - \eta_2)^2 + 1 \right) = \frac{-7}{64} + \frac{1}{4} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{7}{64} \right)^2 + 1 \right) = \frac{3825}{16384} = 0,23346 \dots$$

Die exakte Lösung ist

$$y(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$$

mit $y(\frac{1}{4}) = -0,55$, $y(\frac{1}{2}) = -0,166 \dots$ und $y(\frac{3}{4}) = -0,178 \dots$ zeigt, dass h noch viel zu groß war.

5.2. Das allgemeine Einschrittverfahren

ist gegeben durch die folgende Iterationsvorschrift:

$$(3) \begin{cases} \eta_0 &= y_0 \\ \eta_{k+1} &= \eta_k + h\Phi(x_k, \eta_k, h) \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

(Beim Euler-Verfahren ist $\Phi(x, y, h) = f(x, y)$.)

Welche Eigenschaften muß Φ besitzen, damit das Verfahren konvergent ist?
Wir gehen aus von dem AWP

$$z' = f(t, z), \quad z(x) = y \quad (4)$$

für $t \in [a, b]$ und $(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$.

Die Lösung existiere und wir definieren

$$\Delta(x, y, h) := \begin{cases} \frac{z(x+h) - z(x)}{h}, & h \neq 0 \\ y' = f(x, y), & h = 0 \end{cases}$$

der **Differenzenquotient** der exakten Lösung z im Punkt x .

Definition 5.1 Die Größe $\tau = \tau(x, y, h) := \Delta(x, y, h) - \Phi(x, y, h)$ heißt der **lokale Diskretisierungsfehler** des Verfahrens an der Stelle (x, y) .

Bemerkung:

- für ein sinnvolles Verfahren wird man fordern

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(x, y, h) = 0 \quad (5)$$

- Φ sei stetig in h (i. allg. erfüllt), dann ist wegen $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta(x, y, h) = f(x, y)$ Gleichung (5) äquivalent mit der »**Konsistenzbedingung**«

$$\Phi(x, y, 0) = f(x, y) \quad (6)$$

Definition 5.2 Die Größe

$$e = e(x, h) := \eta(x, h) - y(x)$$

heißt **globaler Diskretisierungsfehler** an der Stelle (x, y) .

Bemerkung:

x fest und $h \rightarrow 0$ mit $h \in H_x := \{\frac{x-x_0}{n} \mid n = 1, 2, \dots\}$, also $\eta(x, h)$ und damit $e(x, h)$ nur definiert für $h \in H_x$.

Definition 5.3 Ein Einschrittverfahren (**EV**) heißt **konvergent**, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(x, h_n) = 0, \quad h_n := \frac{x - x_0}{n}$$

für alle $x \in [a, b]$ und alle f , welche die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes erfüllen.

5. Numerische Behandlung von AWP

Lemma 5.1 Es seien $\xi_k \in \mathbb{C}, k = 0, 1, 2, \dots$ mit $|\xi_{k+1}| \leq (1 + \delta)|\xi_k| + c$ für alle $k = 0, 1, 2, \dots$, $\delta > 0$ und $c > 0$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$|\xi_n| \leq e^{n\delta}|\xi_0| + \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta}c$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist

$$\begin{aligned} |\xi_1| &\leq (1 + \delta)|\xi_0| + c \\ |\xi_2| &\leq (1 + \delta)|\xi_1| + c \leq (1 + \delta)^2|\xi_0| + (1 + \delta)c + c \end{aligned}$$

und damit allgemein

$$|\xi_n| \leq (1 + \delta)^n|\xi_0| + (1 + (1 + \delta) + \dots + (1 + \delta)^{n-1})c$$

Die geometrische Reihe hat den Wert $\frac{(1+\delta)^n-1}{(1+\delta)-1}$ und es gilt $0 < 1 + \delta < e^\delta$ (die ersten beiden Glieder der Taylorentwicklung, die nur positive Werte hat). Damit folgt schließlich:

$$|\xi_n| \leq e^{n\delta}|\xi_0| + \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta}c$$

18.06.2003

■

Satz 5.1 Die Funktion $\Phi(x, y, h)$ sei für $h_0 > 0$ stetig in allen drei Variablen auf $\{(x, y, h) \mid (x, y) \in B, 0 \leq h \leq h_0\}$, wobei $a, b > 0$ und $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_0 - x| \leq a, |y_0 - y| \leq b\}$ und es existiert eine Konstante L mit $|\Phi(x, \tilde{y}, h) - \Phi(x, y, h)| \leq L|\tilde{y} - y| \forall (x, \tilde{y}, h), (x, y, h) \in B$. Dann ist die Konsistenzbedingung

$$\Phi(x, y, 0) = f(x, y) \tag{6}$$

notwendig und hinreichend für die globale Konvergenz von (3).

Beweis: Setze $g(x, y) := \Phi(x, y, 0)$. Dann erfüllt g nach Voraussetzung alle Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes. Also existiert zu $y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung des AWP:

$$z' = g(x, z), \quad z(0) = y_0$$

Betrachte nun die Iterationsfolge zu diesem Problem:

$$z_0 = y_0, \quad z_{k+1} = z_k + h\Phi(x_k, z_k, h), \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots \text{ und } x_k \in [a, b] \tag{7}$$

Mit $x_{k+1} = x_k + h$ folgt aus $z(x_{k+1}) = z(x_k) + h\Delta(x_k, z(x_k), h)$:

$$\begin{aligned} z_{k+1} - z(x_{k+1}) &= z_k - z(x_k) + h\left(\Phi(x_k, z_k, h) - \Delta(x_k, z(x_k), h)\right) \\ \text{Bzw: } (8) \quad e_{k+1} &= e_k + h\left(\Phi(x_k, z_k, h) - \Delta(x_k, z(x_k), h)\right) \end{aligned}$$

Für den Ausdruck in der Klammer gilt:

$$\begin{aligned} (\dots) &= \left(\Phi(x_k, z_k, h) - \Phi(x_k, z(x_k), h) \right. \\ &\quad \left. + \Phi(x_k, z(x_k), h) - \Phi(x_k, z(x_k), 0) \right. \\ &\quad \left. + \Phi(x_k, z(x_k), 0) - \Delta(x_k, z(x_k), h) \right) \end{aligned}$$

Hierbei gilt

1. Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned} \Delta(x_k, z(x_k), h) &= \frac{z(x_{k+1}) - z(x_k)}{h} = z'(x_k + \vartheta h) \quad 0 < \vartheta < 1 \\ &= g(x_k + \vartheta h, z(x_k + \vartheta h)) \end{aligned}$$

2. Betrachte $T : \{(x, y, z) \mid x \in [a, b], y = z(x), 0 \leq h \leq h_0\}$. Offensichtlich ist T kompakt. Wegen der Stetigkeit von Φ folgt:

$$\xi(h) := \max_{x \in [a, b]} |\Phi(x, z(x), h) - \Phi(x, z(x), 0)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

3. Setze $\alpha := \max_{x \in [a, b]} |z(x)|$. Wegen der Stetigkeit von g auf $T^* := \{(x, y) \mid x \in [a, b], |y| \leq \alpha\}$ folgt:

$$\chi(h) := \max_{\substack{x, x+\tilde{h} \in [a, b] \\ 0 \leq \tilde{h} \leq h}} |g(x, z(x)) - g(x + \tilde{h}, z(x + \tilde{h}))| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

4. Aufgrund unserer Voraussetzungen ist insbesondere

$$|\Phi(x_k, z_k, h) - \Phi(x_k, z(x_k), h)| \leq |z_k - z(x_k)|$$

Damit folgt aus (8) (Dreiecksungleichung und (1) bis (4)):

$$|e_{k+1}| \leq |e_k| + h \left(\underbrace{L|e_k|}_{(4)} + \underbrace{\xi(h)}_{(2)} + \underbrace{\chi(h)}_{\text{Nebenrechnung}} \right)$$

Nebenrechnung: $\Phi(x_k, z(x_k), 0) = g(x_k, z(x_k))$

$$\Delta(x_k, z(x_k), h) \stackrel{(1)}{=} g(x_k, \vartheta h, z(x_k + \vartheta h)) \text{ weiter geht noch (3) ein}$$

Bzw.: $|e_{k+1}| \leq (11 + hL)|e_k| + h(\xi(h) + \chi(h))$. Mit $\delta = hL, c = h(\xi(h) + \chi(h))$ im Lemma, so folgt unter Berücksichtigung von $e_0 = z_0 - z(x_0) = 0$ und $(k+1)hL = (x - x_0)L$:

$$\begin{aligned} |e_{k+1}| &\leq (1 + hL)|e_k| + h(\xi(h) + \chi(h)) \\ &\stackrel{\text{Lemma}}{\leq} \underbrace{e^{(k+1)hL}}_{\rightarrow 0} |e_0| + \frac{e^{(k+1)hL}}{hL} h(\xi(h) + \chi(h)) \\ &= (\xi(h) + \chi(h)) \frac{e^{(x-x_0)L} - 1}{L} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \\ h &\in H_x = \left\{ \frac{x - x_0}{k+1}, k = 0, 10, 2, \dots \right\}, x \in [a, b] \text{ beliebig aber fest} \end{aligned}$$

5. Numerische Behandlung von AWP

Das heißt aber insgesamt $\forall x \in [a, b]$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in H_x}} z_k = z(x) \quad (9)$$

Schließlich: die Konsistenzbedingung ist tatsächlich notwendig und auch hinreichend:

- Hinreichend: Sei $(\Phi(x, y, 0) =)g(x, y) = f(x, y)$, dann ist $z(x) = y(x)$ und die Behauptung folgt aus (9)
- Notwendig: Die Methode sei konvergent, Annahme: $g(\bar{x}, \bar{y}) \neq f(\bar{x}, \bar{y})$ für (\bar{x}, \bar{y}) . Es gibt nun nach Voraussetzung eine eindeutige Lösung des AWP

25.06.2003

$$y' = f(x, y), \quad y(\bar{x}) = \bar{y} \quad \text{in } [a, b]$$

Die durch (7) def. Werte z_n konvergieren nach Voraussetzung gegen die Lösung $y(x)$, andererseits (durch (9) gezeigt) gegen die Lösung von $z' = g(x, z), z(0) = y_0$, nämlich gegen $z(x)$. Also muß $z(x) = y(x)$ auf $[a, b]$ gelten, wegen des Eindeutigkeitsatzes. D.h. $z(x) \equiv y(x)$ auf $[a, b]$, aber $z'(\bar{x}) = g(\bar{x}, \bar{y}) \neq f(\bar{x}, \bar{y}) = y'(\bar{x})$ (Widerspruch!)

■

5.3. Spezielle Einschrittverfahren

5.3.1. Direkte Anwendung der Taylorentwicklung

Es sei $y' = f(x, y)$ mit der Lösung $y(x)$ und $f(x, y)$ sei beliebig diffbar. Dann sind alle Ableitungen von y durch f bestimmt:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y'' &= \frac{d}{dx}(f(x, y)) = f_x(x, y) + f_y(x, y)y' = f_x(x, y) + f_y(x, y)f(x, y) \\ &\text{u.s.w} \end{aligned}$$

Einschub: Taylorentwicklung von f um $(\xi - h)$

$$f(\xi - h + h) = f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\xi - h)}{k!} \underbrace{(\xi - (\xi - h))^k}_{=h^k}$$

und $\xi = x + h$:

$$y(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k = y(x) + \frac{y'(x)}{1!} h + \frac{y''(x)}{2!} h^2 + \dots$$

Einschub: Die Landausymbole $\mathfrak{O}(g)$ und $\mathfrak{o}(g)$:

Sei $M \subset \mathbb{R}$, z_0 Häufungspunkt von M ; f, g seien reellwertige Funktionen.

Definition 5.4 Die Ordnungssymbole:

- $f = \mathfrak{O}(g)$ für $x \rightarrow x_0$: $\exists U(x_0)$ und eine Zahl K mit

$$|f(x)| \leq K|g(x)| \forall x \in M \cap U(x_0)$$

- $f = \mathfrak{o}(g)$ für $x \rightarrow x_0$: Für beliebiges $\epsilon > 0$ existiert ein $U_\epsilon(x_0)$, so dass $\forall x \in U_\epsilon(x_0) \cap M$ gilt:

$$|f(x)| \leq \epsilon|g(x)|$$

für $g \neq 0$ sind äquivalent:

- $f = \mathfrak{O}(g)$ für $x \rightarrow x_0$:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \text{ ist beschränkt für } x \rightarrow x_0 \text{ in } M$$

- $f = \mathfrak{o}(g)$ für $x \rightarrow x_0$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0 \text{ in } M$$

Beispiel: 5.2 $n \in \mathbb{N}$:

$$x^n = \mathfrak{O}(cx^n),$$

$$\sin(x) = \mathfrak{O}(1)$$

$$x^k = \mathfrak{o}(e^x) \text{ für } x \rightarrow \infty,$$

$$x^n = \mathfrak{o}(e^{-x}) \text{ für } x \rightarrow 0$$

Zur Abkürzung definiere das **totale Differential** nach x :

$$y^{(p+1)} := f^{(p)}(x, y), \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Für die Lösung $y(x)$ gilt dann:

$$y(x+h) - y(x) = \frac{h}{1!} f(x, y) + \frac{h^2}{2!} f'(x, y) + \dots + \frac{h^p}{p!} f^{(p-1)}(x, y) + \mathfrak{O}(h^{p+1})$$

Es folgt für $p \in \mathbb{N}$:

$$\Delta(x, y, h) = f(x, y) + \frac{h}{2} f'(x, y) + \dots + \frac{h^{p-1}}{p!} f^{(p-1)}(x, y) + \mathfrak{o}(h^p)$$

5. Numerische Behandlung von AWP

Bemerkung:

- $\Phi(x, y, h)$ sollte so gewählt werden, dass Φ möglichst gut mit Δ übereinstimmt
- Satz: \Rightarrow das von h unabhängige Glied in Φ muß identisch sein, mit $f(x, y)$

Das führt zu der folgenden Möglichkeit Verfahren aufzustellen (Taylorentwicklung: Methode der Ordnung p):

$$\Phi(x, y, h) = f(x, y) + \frac{h}{2}f'(x, y) + \dots + \frac{h^{p-1}}{p!}f^{(p-1)}(x, y) \quad (10)$$

Definition 5.5 Ein EV beschrieben durch $\Phi(x, y, h)$ ist von p -ter Ordnung, wenn:

$$\Delta(x, y, h) - \Phi(x, y, h) = \mathcal{O}(h^p) \text{ für } h \rightarrow 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

und für alle p -mal stetig diffbaren Funktionen $f(x, y)$.

Bemerkung:

Die Ableitungen $f'(x, y)$, $f''(x, y)$, .. sind im Allgemeinen schwierig zu berechnen. Die so aufgestellten Verfahren besitzen in der Praxis keine Bedeutung.

Beispiel: 5.3

$$\begin{aligned} y''' = f''(x, y) &= \frac{d}{dx} (f_x(x, y) + f_y(x, y)f(x, y)) \\ &= f_{xx} + f_{xy}y' + (f_{xy} + f_{yy}y')f + f_y(f_x + f_yy') \\ &= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_xf_y + f_{yy}f^2 + f_y^2f \end{aligned}$$

Somit erhalten wir ein Verfahren dritter Ordnung:

$$\Phi = f + \frac{h}{2}(f_x + f_yf) + \frac{h^2}{6}(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_xf_y + f_{yy}f^2 + f_y^2f)$$

5.3.2. Indirekte Verwendung der Taylormethode

26.06.2003

Ziel: Φ soll mit Δ bis auf einen Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(h^p)$ übereinstimmen **ohne** Verwendung der Ableitungen von f

Ansatz 1: (vereinfachte Runge-Kutta-Formeln)

$$\Phi(x, y, h) = a_1f(x, y) + a_2f(x + p_1h, y + p_2hf(x, y))$$

mit zu bestimmenden a_1, a_2, p_1, p_2 .

Taylorentwicklung von Φ nach h um 0, führt zu

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, h) &= a_1 f(x, y) + a_2 f(x + p_1 h, y + p_2 h f(x, y)) \Big|_{h=0} \\ &\quad + a_2 \frac{h}{1!} \left(f_x(x + p_1 h, y + p_2 h f(x, y)) \Big|_{h=0} p_1 \right. \\ &\quad \left. + f_y(x + p_1 h, y + p_2 h f(x, y)) \Big|_{h=0} p_2 f(x, y) \right) + \mathcal{O}(h^2)\end{aligned}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned}\Delta(x, y, h) &= f(x, y) + \frac{h}{2} f'(x, y) + \mathcal{O}(h^2) \\ &= f(x, y) + \frac{h}{2} (f_x(x, y) + f_y(x, y) f(x, y)) + \mathcal{O}(h^2)\end{aligned}$$

Für ein Verfahren zweiter Ordnung muss also gelten :

$$a_1 + a_2 = 1, \quad a_2 p_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 p_2 = \frac{1}{2}$$

Für $\alpha \neq 0$ lösen offensichtlich

$$a_1 = 1 - \alpha, \quad a_2 = \alpha, \quad p_1 = p_2 = \frac{1}{2\alpha}$$

diese Bedingungen, also

$$\Phi(x, y, h) = (1 - \alpha) f(x, y) + \alpha f\left(x + \frac{h}{2\alpha}, y + \frac{h}{2\alpha} f(x, y)\right)$$

Spezialfälle:

- $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \quad p_1 = p_2 = 1, \quad (\alpha = \frac{1}{2})$

$$\Phi(x, y, h) = \frac{1}{2} (f(x, y) + f(x + h, y + h f(x, y))) \quad \text{Verfahren von Heun}$$

- $a_1 = 0, a_2 = 1, \quad p_1 = p_2 = \frac{1}{2} \quad (\alpha = 1)$

$$\Phi(x, y, h) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y)\right) \quad \text{mod. Euler Verfahren}$$

Bemerkung:

- f ist pro Schritt zweimal auszuwerten
- beide Verfahren sind von zweiter Ordnung

5. Numerische Behandlung von AWP

Obige Verfahren haben keine Bedeutung für die Praxis, Praxis-relevant ist hingegen **Ansatz 2: Runge-Kutta:**

$$\Phi(x, y, h) = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\text{mit: } k_1 = f(x, y), \quad k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2\right), \quad k_4 = f(x + h, y + hk_3)$$

Die Taylorentwicklung nach h liefert

$$\Delta(x, y, h) - \Phi(x, y, h) = \mathcal{O}(h^4),$$

also ein Verfahren vierter Ordnung.

Beispiel: 5.4 Gegeben sei das AWP:

$$y' = (x - y)^2 + 1, \quad y(0) = -1$$

Wir führen nur einen Iterationsschritt aus! Gesucht ist $y(\frac{1}{4})$, also $h = \frac{1}{4}$:

1. Exakte Lösung: Substitution $z = x - y \Rightarrow y = x - z \Rightarrow y' = 1 - z'$. Eingesetzt:

$$1 - z' = z^2 + 1, z \neq 0, \Rightarrow \frac{z'}{z^2} = -1, \quad \text{integriert nach } x:$$

$$-\frac{1}{z} = -x + c, \text{ bzw mit } k = -c:$$

$$\frac{1}{z} = x + k, \quad \frac{1}{(x - y)} = x + k, \text{ und damit}$$

$$y = x - \frac{1}{x + k} = \frac{x^2 + kx - 1}{x + k}$$

$$\text{Anfangsbed.: } y(0) = -1 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{k}, \Rightarrow k = 1$$

Die Lösung ist $y(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$, $x = \frac{1}{4}$ eingesetzt:

$$\frac{4}{5} \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 \right) = -\frac{11}{20} = -0,55$$

2. Direktes Verfahren: $f(x, y) = (x - y)^2 + 1$ mit $f_x = 2(x - y)$, $f_y = (-2(x - y))$, $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = -2$, $f_{yy} = 2$. Es war

$$\Phi(x, y, h) = f + \frac{h}{2} (f_x + f_y f) + \frac{h^2}{6} (f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{xy} f_{yy} f^2 + f_y^2 f)$$

$$\begin{aligned} \text{Also: } \Phi(x, y, h) &= (x - y)^2 + 1 + \frac{h}{2} (2(x - y) - 2(x - y) ((x - y)^2 + 1)) \\ &\quad + \frac{h^2}{6} [2 - 4((x - y)^2 + 1) - 4((x - y)^2 + 1)^2 + 2((x - y)^2 + 1)^2 \\ &\quad + 4(x - y)^2 ((x - y)^2 + 1)] \end{aligned}$$

$\eta_0 = y_0$, $\eta_{k+1} = \eta_k + h\Phi(x_k, \eta_k, h)$, $x = x_0 = 0 : y = \eta_0 = y_0 = 1$.
Eingesetzt in Φ : $\Phi(x_0, y_0, \frac{1}{4}) = \dots = \frac{29}{16}$. Damit bestimmt man η_1 :

$$\eta_1 = \eta_0 + h\Phi(0, -1, \frac{1}{4}) = \dots = -\frac{35}{64} = -0.546 \dots$$

3. Euler Verfahren: $\eta_0 = y_0; \eta_{k+1} = \eta_k + hf(x_k, \eta_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ Hier ist $h = \frac{1}{4}, x_0 = 0, \eta_0 = y_0 = -1$ und $f(x_k, \eta_k) = (x_k - \eta_k)^2 + 1$.

$$\begin{aligned} k = 0 : \eta_1 &= \eta_0 + hf(x_0, \eta_0) = \eta_0 + h((x_0 - \eta_0)^2 + 1) \\ &= -1 + \frac{1}{4}((0 + 1)^2 + 1) = -\frac{1}{2} = -0.5 \end{aligned}$$

4. Heun-Verfahren: $\eta_0 = y_0$, $\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{2} [f(x_k, \eta_k) + f(x_{k+1}, \eta_k + hf(x_k, \eta_k))]$,
 $h = \frac{1}{4}, x_0 = 0, \eta_0 = y_0 = -1$ und

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}, \eta_k + hf(x_k, \eta_k)) &= (x_{k+1} - \eta_k - h((x_k - \eta_k)^2 + 1))^2 + 1 \\ k = 0 : \eta_1 &= \eta_0 + \frac{h}{2} \left((x_0 - \eta_0)^2 + 1 + (x_1 - \eta_0 - h((x_0 - \eta_0)^2 + 1))^2 + 1 \right) \\ &= \dots = -\frac{71}{128} = -0.55469 \dots \end{aligned}$$

5. Modifiziertes Euler Verfahren: $\eta_0 = y_0, \eta_{k+1} = hf(x_k + \frac{h}{2}, \eta_k + \frac{h}{2}f(x_k, \eta_k))$, $k = 0, 1, 2, \dots$ hier: $h = \frac{1}{4}, x_0 = 0, \eta_0 = y_0 = -1$. Man erhält als Lösung: $\eta_1 = -0.5585 \dots$ 02.07.2003

6. Klassisches Runge Kutta Verfahren: $\eta_0 = y_0, \eta_{n+1} = \eta_n + \frac{1}{6}k$ mit

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, \eta_n), & k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, \eta_n + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, \eta_n + \frac{k_2}{2}\right), & k_4 &= hf(x_n + h, \eta_n + k_3), \\ k &= k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 \end{aligned}$$

Man erhält $\eta_1 = -0.55001 \dots$

5.4. Mehrschrittverfahren

Bei einem Mehrschrittverfahren (MV) zu dem AWP $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ wird für $r \geq 2$ Näherungswerte

$$\eta_k \text{ für } y_k := y(x_k), \quad k = j, j + 1, \dots, j + (r - 1)$$

5. Numerische Behandlung von AWP

an den Stellen $x_k = x_0 + kh$ ein weiterer Näherungswert

$$\eta_{j+r} \text{ für } y_{j+r} = y(x_{j+r})$$

berechnet.

Bemerkung:

Die Näherungswerte $\eta_1, \dots, \eta_{r-1}$ für den Start des Verfahrens werden z. B. mit Hilfe eines Einschrittverfahrens berechnet.

Einschub: Interpolationspolynome

Problem: Gegeben sind $n+1$ paarweise verschiedene Knoten der reellen Achse $x_0, \dots, x_n; x_k \in \mathbb{R}, x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ und $n+1$ beliebige reelle Zahlen $f_k, k = 0, \dots, n$.

Gesucht ist ein algebraisches Polynom $p_n \in \Pi_n$ mit $p_n(x_k) = f_k, k = 0, 1, 2, \dots$

Satz 5.2 Zu beliebigen $n+1$ Stützstellen (x_k, f_k) für $k = 0, 1, 2, \dots, n$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ existiert genau ein Polynom $p_n \in \Pi_n$ mit $p_n(x_k) = f_k$ für $k = 0, 1, \dots, n$.

Beweis:

1. Eindeutigkeit: Es seien $p_n, q_n \in \Pi_n$ mit $p_n(x_k) = q_n(x_k) = f_k$. Dann besitzt $h_n := p_n - q_n \in \Pi_n$ mindestens $n+1$ verschiedene Nullstellen, nämlich die paarweise verschiedenen Knoten x_0, x_1, \dots, x_n (Fundamentalsatz der Algebra) $\Rightarrow h_n(x) \equiv 0$, bzw. $p_n = q_n$.
2. Existenz: wir geben das interpolierende Polynom explizit an, hierzu definiere

$$L_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \in \Pi_n \quad (\text{Lagrangesches Grundpolynom})$$

Offensichtlich gilt für $k \in \{0, 1, \dots, n\}$:

$$L_i(x_k) = \delta_{i,k} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Setze $p_n(x) := \sum_{i=0}^n f_i L_i(x) \in \Pi_n$. Es folgt

$$P_n(x_k) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x_k) = \sum_{i=0}^n f_i \delta_{i,k} = f_k$$

■

Beispiel: 5.5 $n = 2$, 3 Stützstellen $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 1)$, $(1, 0)$

$$L_0 = \frac{(x - \frac{1}{2})(x - 1)}{-\frac{1}{2}(-1)} = 2x^2 + 3x + \frac{1}{2}$$

$$L_1 = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})} = 4x^2 + 4x$$

$$L_2 = \frac{(x - 0)(x - \frac{1}{2})}{(-1)(-\frac{1}{2})} = 2x^2 - x$$

Es folgt: $p_2(x) = 0 \cdot L_0(x) + 1 \cdot L_1(x) + 0 \cdot L_2(x) = -4x^2 + 4x$ und

$$p_2(0) = 0, \quad p_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad p_2(1) = 0$$

5.5. Herleitung von Mehrschrittverfahren

Wir integrieren die DGL über das Intervall $[x_{r-j}, x_{r+k}]$:

09.07.2003

$$\int_{x_{r-j}}^{x_{r+k}} y'(x) dx = \int_{x_{r-j}}^{x_{r+k}} f(x, y(x)) dx$$

Es folgt:

$$(i) \quad y(x_{r+k}) - y(x_{r-j}) = \int_{x_{r-j}}^{x_{r+k}} f(x, y(x)) dx$$

Wir ersetzen in der obigen Beziehung den Integranden f durch das eindeutige Interpolationspolynom P_q mit

1. $\deg P_q \leq q$
2. $P_q(x_i) = f(x_i, y(x_i)), \quad i = r, r-1, \dots, r-q$

wobei die Knoten x_i äquidistant seien: $h = x_{i+1} - x_i, \quad i = r, r-1, \dots, r-q$.

Die Lagrangesche Darstellung des eindeutigen P_q ist:

$$P_q(x) = \sum_{i=0}^q f(x_i, y(x_i)) L_i(x)$$

mit $L_i(x) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{x - x_{r-l}}{x_i - x_{r-l}}, \quad i = 0, 1, \dots, q$

5. Numerische Behandlung von AWP

Somit erhält man aus (i)

$$(2) \quad y(x_{r+k}) - y(x_{r-j}) \hat{=} \sum_{i=0}^q f(x_{r-i}, y(x_{r-i})) \int_{x_r}^{x_{r+k}} L_i(x) dx$$

$$h \sum_{i=0}^q \beta_{q,i} f(x_{r-i}, y(x_{r-i}))$$

mit $\beta_{q,i} = \frac{1}{h} \int_{x_{r-j}}^{x_{r+k}} L_i(x) dx$

Wir machen einen Näherungsansatz, indem wir in (2) » $\hat{=}$ « durch » \approx « ersetzen und $y(x_i)$ durch η_i ersetzen:

$$\eta_{r+k} = \eta_{r-j} + h \sum_{i=0}^q \beta_{q,i} f_{r-i}, \quad \text{mit } f_{r-i} := f(x_{r-i}, \eta_{r-i}) \quad (3)$$

Je nach Wahl der Größen k, j und q erhält man verschiedene Verfahren.

Beispiel: 5.6 • $k = 1, j = 0, q = 0, 1, 2, \dots$: **Verfahren von Adams-Bashforth:**

$$\eta_{r+1} = \eta_r + h (\beta_{q,0} f_r + \beta_{q,1} f_{r-1} + \dots + \beta_{q,q} f_{r-q})$$

mit $\beta_{q,i} = \int_0^1 \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{u+l}{-i+l} du, \quad i = 0, 1, \dots, q$

• $k = 1, j = 1, q$ beliebig: **Verfahren von Nyström**

$$\eta_{r+1} = \eta_{r-1} (\beta_{q,0} f_r + \dots + \beta_{q,q} f_{r-q})$$

mit $\beta_{q,i} = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{u+l}{-i+l} du, \quad i = 0, 1, \dots, q$

Speziell: $q = 0$: $\beta_{0,0} = \int_{-1}^1 du = 2$, also $\eta_{r+1} = \eta_{r-1} + 2h f_r$

• $k = 0, j = 1, q = 0, 1, 2, \dots$: **Verfahren von Adams-Moulton**

$$\eta_r = \eta_{r-1} + h (\beta_{q,0} f_r + \dots + \beta_{q,q} f_{r-q})$$

mit $\beta_{q,i} = \int_{-1}^0 \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{u+l}{-i+l} du, \quad i = 0, 1, 2, \dots, q$

Ersetzung $:r \mapsto r+1$:

$$\eta_{r+1} = \eta_r h (\beta_{0,0} f_{r+1} + \dots + \beta_{q,q} f_{r+1-q}) \quad (4)$$

5.5. Herleitung von Mehrschrittverfahren

Hier tritt der neue Wert η_{r+1} auch auf der rechten Seite auf (in f_{r+1}). Verfahren mit dieser Eigenschaft heißen **implizite Verfahren**, ohne heißen sie **explizite Verfahren**. Explizite Verfahren heißen auch **Predictorverfahren**, während implizite Verfahren auch **Korrektorverfahren** heißen.

- $k = 0, j = 2, q = 0, 1, \dots$: **Verfahren von Milne Thompson** Ersetzen von r durch $r + 1$:

$$\eta_{r+1} = \eta_{r-1} + h(\beta_{q,0}f_{r+1} + \dots + \beta_{q,q}f_{r+1-q})$$

mit $\beta_{q,i} = \int_{-2}^0 \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^q \frac{u+l}{-i+l} du, \quad i = 1, \dots, q$

Bemerkung:

Alle diese MV besitzen die folgende Form:

$$a_r \eta_{j+r} + a_{r-1} \eta_{r-1} + \dots + a_0 \eta_0 = hF(x_j, \eta_j, h, f) \quad (5)$$

Einschub: Spezialfall von (5)

$$L(u_j) := \sum_{s=0}^r a_s u_{j+s} =: c_{j+r}, \quad j = 1, 2, \dots, a_0 \neq 0, a_r \neq 0 \quad (6)$$

heißt eine **Differenzgleichung der Ordnung r**.

Satz 5.3 (6) besitzt genau eine Lösung, welche die folgenden AB erfüllt: $y_i = u_i, \quad i = 1, \dots, r$.

Satz 5.4 Die Lösungsmenge der homogenen Differenzgleichung

$$\sum_{s=0}^r a_s u_{j+s} \quad (7)$$

ist ein linearer Raum der Dimension r , d.h. zu (7) existiert eine linear unabhängige Lösung (Fundamentalsystem).

Zur Ermittlung eines solchen Fundamentalsystems machen wir den Ansatz:

$$u_i = x^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

eingesetzt in (7) :

$$\begin{aligned} L(u_j) &:= \sum_{s=0}^r a_s u_{j+s} = \sum_{s=0}^r a_s x^{j+s} \\ &= x^j (a_0 + a_1 x + \dots + a_r x^r) \stackrel{!}{=} 0 \\ x = 0: & \text{ nur triviale Lösung} \\ x \neq 0: & p(x) := a_0 + a_1 x + \dots + a_r x^r = 0 \end{aligned}$$

5. Numerische Behandlung von AWP

d.h. x muss Nullstelle des charakteristischen Polynoms sein und jede Nullstelle liefert eine Lösung.

Bemerkung:

Ist λ eine Nullstelle von p , mit der Vielfachheit $r \geq 2$, dann sind

$$\{\lambda^i\}_{i=1}^{\infty}, \quad \{i\lambda^i\}_{i=1}^{\infty}, \quad \dots, \quad \{i^{r-1}\lambda^i\}_{i=1}^{\infty},$$

10.07.2003

r linear unabhängige Lösungen der Differenzgleichung.

Beispiel: 5.7 Ein zur Zeit $t = 0$ geborenes Kaninchenpaar erzeugt vom zweiten Monat seiner Existenz ein weiteres Paar, ebenso die Nachkommen. Wieviele Paare leben nach n Monaten?

Monat	0	1	2	3	4	5	...
Zahl der Paare	1	1	2	3	5	8	...

Also lautet die Differenzgleichung $u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$, $u_0 = u_1 = 1$ Diese so definierten Zahlen heißen **Fibonacci Zahlen**.

Ansatz: $u_n = x^n$, $x \neq 0$,

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Die allgemeine Lösung ist also:

$$\bar{u}(n) = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Die Koeffizienten c_1, c_2 werden aus der Anfangsbedingung $\bar{u}(0) = c_1 + c_2 = 1$ bestimmt zu

$$c_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

Superpositionsprinzip

Satz 5.5 Die allgemeine Lösung setzt sich additiv zusammen aus der allgemeinen homogenen Lösung und einer Partikulärlösung.

Der Satz wird an einem Beispiel erklärt:

Beispiel: 5.8

$$u_{j+2} + u_{j+1} - 6u_j = -j \quad (*)$$

5.6. Konsistenz, Stabilität und Konvergenz bei MV

Homogene Lösung: $u_j = x^j$, $x \neq 0$

$$x^2 + x - 6 = 0, \quad x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{25}}{4}, \quad x_1 = 2, x_2 = -3$$

Allgemeine homogene Lösung: $h_h(j) = c_1 2^j + (-1)^j 3^j$

Partikuläre Lösung: Ansatz: $v_j = aj^2 + bj + c$, eingesetzt in (*) :

$$a(j+2)^2 + b(j+2) + c + a(j+1)^2 + b(j+1) + c - 6aj^2 - 6bj - 6c \stackrel{!}{=} -j^2$$

Mittels Koeffizientenvergleich bestimmt man die Unbekannten:

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{3}{8}, \quad c = \frac{19}{32}$$

Die allgemeine inhomogene Lösung ist :

$$u(j) = c_1 2^j + c_2 (-1)^j 3^j + \frac{1}{4} j^2 + \frac{3}{8} j + \frac{19}{32}$$

5.6. Konsistenz, Stabilität und Konvergenz bei MV

Betrachte das AWP:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

Im folgenden sei $y_j := \eta_j$ also ein Näherungswert für $y(x_j)$.

Definition 5.6 Ein Verfahren der Form

$$a_r y_{j+r} + a_{r-1} y_{j+r-1} + \dots + a_0 y_j = hF(x_{j+r}, \dots, x_r, y_{j+r}, \dots, y_j, h, f) \tag{2}$$

heißt MV der Ordnung r ($a_0 \neq 0, a_r \neq 0$).

Bemerkung:

Bisher hing F linear von f ab:

$$F(x_k, y_k, h, f) = \sum_{k=0}^r b_k f(x_{j+k}, y_{j+k}), \quad \text{lineare MV}$$

Wir setzen $\epsilon_i := y_i - y(x_i)$ und fordern dass f der Funktionenklasse

$$F_1 := \left\{ g(x, y) \mid (x, y) \in \underbrace{[a, b] \times \mathbb{R}}_{=: S}, g_x \text{ und } g_y \text{ sind in } S \text{ definiert und beschränkt} \right\}$$

angehört.

Es sei $f \in F_1, y \in \mathbb{R}, z = z(t)$ Lösung des AWP $z'(t) = f(t, z(t)), z(x_0) = y_0$.

5. Numerische Behandlung von AWP

Definition 5.7 Die Größe

$$\tau = \tau(x, y, h) := \frac{1}{h} \left(\sum_{s=0}^r a_s z(x + sh) - hF(x, z(x), \dots, z(x + rh), h, f) \right)$$

heißt lokaler **Diskretisierungsfehler**.

Bemerkung:

- τ beschreibt, wie genau die exakte Lösung die Differenzengleichung in den ersten r Knoten erfüllt
- Vernünftige Verfahren: τ ist klein für kleines h .

Definition 5.8 Das Verfahren heißt **konsistent**, falls für jedes $f \in F_1$ eine Funktion $\sigma = \sigma(h)$ mit $\lim_{h \rightarrow 0} \sigma(h) = 0$ existiert mit $|\tau(x, y, h)| \leq \sigma(h) \forall x, y \in [a, b]$. Das Verfahren heißt von p -ter Ordnung, wenn $\sigma(h) = O(h^p)$.

Lemma 5.2 Ist F stetig in h , so gilt für ein konsistentes Verfahren

$$a_r + a_{r-1} + \dots + a_0 = 0$$

Beweis: Man setze $f(x, y) = 0$ und $z(x) \equiv c$. Es folgt

$$\tau(x, y, h) = \frac{1}{h} (c(a_0 + \dots + a_r) - hF(x, c, \dots, c, h, 0))$$

Wegen $0 \leq |\tau(x, y, h)| \leq \sigma(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ und c beliebig muß gelten: $a_0 + \dots + a_r = 0$ ■

Im folgenden benötigen wir oft zwei Bedingungen an F :

$$F(x, y_r, \dots, y_0, h, f(x, y) \equiv 0) \equiv 0 \quad \forall x \in [a, b], y_i \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R} \quad (3)$$

und zu jedem $f \in F_1$ gibt es ein $h_0 > 0$ und $c > 0$, so dass

$$|F(x, y_r, \dots, y_0, h, f) - F(x, \tilde{y}_r, \dots, \tilde{y}_0, h, f)| \leq c \sum_{k=0}^r |y_k - \tilde{y}_k| \quad (4)$$

16.07.2003 $\forall x \in [a, b], 0 \leq h \leq h_0$ und $y_k, \tilde{y}_k \in \mathbb{R}$

Definition 5.9 Es gelte $|\epsilon_j| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ für $j = 0, 1, \dots, r-1$, dann heißt das Verfahren (2) **konvergent**, wenn

$$\forall f \in F_1 \text{ gilt: } \max_j |\epsilon_j| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ für } j = r, r+1, \dots$$

Wir setzen $p(\lambda) := a_r \lambda^r + a_{r-1} \lambda^{r-1} + \dots + a_0$. Das Verfahren (2) heißt **stabil**, falls für jede Nullstelle λ_i von p gilt:

5.6. Konsistenz, Stabilität und Konvergenz bei MV

1. $|\lambda_i| \leq 1$
2. jede Nullstelle λ_i von p mit $|\lambda_i| = 1$ ist einfache Nullstelle

Satz 5.6 Das Verfahren (2) sei konvergent und erfülle (3), dann ist (2) stabil.

Beweis: Betrachte das AWP $y' = f(x, y) \equiv 0, y(x_0) = y_0 \Rightarrow$ die eindeutige Lösung ist $y(x) \equiv 0$. Nach Voraussetzung ist das Verfahren

$$a_r y_{j+r} + \dots + a_0 y_j = [F(x_k, y_k, h, 0) \underset{(3)}{=}]0 \quad (5)$$

konvergent gegen die Lösung $y(0) = 0$, wobei für die Anfangswerte $y_0 = \epsilon_0, \dots, y_{r-1} = \epsilon_{r-1}$ gelte: $\max_{0 \leq i \leq r-1} |\epsilon_i| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

(5) ist aber eine Differenzgleichung, d.h. nach dem Einschub über Differenzgleichungen gilt: Mit λ Nullstelle von p ist $c \{ \lambda^k \}_{k=1}^{\infty}$ Lösung von (5).

Annahme: das Verfahren ist nicht stabil:

1. λ sei Nullstelle von p mit $|\lambda| < 1$: O.B.d.A. sei $\lambda \in \mathbb{R}_+$, definiere $y_j := h\lambda^j$, dann ist (y_j) Lösung von (5) zu den Anfangswerten $\epsilon_0 = y_0, \dots, \epsilon_{r-1} = y_{r-1}$, wobei $\max_j |\epsilon_j| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Definiere für $a < c < b$: $j := \lceil \frac{c}{h} \rceil$.

Andererseits gilt dann $|y_j| = |y_{\lceil \frac{c}{h} \rceil}| \not\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, Widerspruch! Denn: o.B.d.A sei $\lceil \frac{c}{h} \rceil = \frac{c}{h}$.

Dann gilt mit $H := \frac{1}{h}$ nach l'Hospital:

$$\lim_{h \rightarrow 0} h\lambda^{\frac{c}{h}} = \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{\lambda^{cH}}{H} = \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{c \ln(\lambda) \lambda^{cH}}{1} = \infty$$

2. λ sei jetzt Nullstelle von p mit $|\lambda| = 1$, der Vielfachheit $\sigma \geq 2$. Nach dem Einschub über Differenzgleichungen gilt: $\lambda_j = h^j \lambda^j$ ist Lösung von (5) und es gilt analog wie unter (1.): $|y_{\lceil \frac{c}{h} \rceil}| \not\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, Widerspruch!

■

Einschub über Normen und Polynome

1. **Norm:** Sei $V = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} , $L_m(V) =$ Raum der m -reihigen quadratischen Matrizen über V .

Definition 5.10 Zu gegebener Vektornorm $\|\cdot\|$ in V^m betrachte die Abbildung $\phi : L_m(V) \rightarrow \mathbb{R}$, die vermöge

$$\phi(B) := \sup_{\substack{z \in V^m \\ z \neq 0}} \frac{\|Bz\|}{\|z\|} = \sup_{\substack{z \in V^m \\ \|z\|=1}} \|Bz\| \quad \forall B \in L_m(V)$$

definiert ist. ϕ ist die der Vektornorm zugeordnete Matrixnorm $\phi(B) = \|B\|$.

5. Numerische Behandlung von AWP

Für solche Normen gilt:

$$\|Bz\| \leq \|B\| \|z\|$$

Beispiele:

- Maximums-Norm: $\|z\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq m} |z_j| \Rightarrow \|B\| = \max_j \sum_{k=1}^m |b_{jk}|$ (Zeilensummennorm)
- Euklidische Norm: $\|z\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^m |z_k|^2} \Rightarrow \|B\|_2 = \sqrt{\sigma} = +\sqrt{\sigma(B \cdot B^*)}$ (σ ist der größte Eigenwert der Matrix, $B \cdot B^*$ mit $B^* = ((b_{jk}^*))$ und $b_{jk}^* = \bar{b}_{kj}$ (Spektralnrm) Ist B hermitesche Matrix ($B^* = B$), dann ist die Spektralnrm = Spektralradius
- Betragssummennorm: $\|z\|_1 = \sum_{k=1}^m |z_k| \Rightarrow \|B\|_1 = \max_j \sum_{k=1}^m |b_{kj}|$ (Spaltensummennorm)

Satz 5.7 $A \in L_m(V)$, für jede zugehörige Matrixnorm $\|\cdot\|_1$ gilt

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

$\rho(A)$ = Spektralradius von A = Maximalbetrag der Eigenwerte von A

Satz 5.8 Alle Normen auf \mathbb{R}^m (\mathbb{C}^m) sind äquivalent, d.h. seien $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ Normen auf \mathbb{R}^m oder \mathbb{C}^m , dann existieren Konstanten n, N mit

$$n \|z\|_2 \leq \|z\|_1 \leq N \|z\|_2, \quad \forall z \in \mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m)$$

2. Polynome: Jedes Polynom

$$f_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 \quad (*)$$

ist darstellbar als Determinante:

$$f_n(z) = (-1)^n \begin{vmatrix} -z & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -z & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -z & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -(a_{n-1} + z) \end{vmatrix}$$

Folgerung: f_n ist das charakteristische Polynom der Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -(a_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Folgerung (aus dem Satz von Gerschgorin): Die Nullstellen von (*) liegen in der Vereinigung der Kreisbereiche: $|z| \leq 1, |z + a_{n-1}| \leq \sum_{k=0}^{n-2} |a_k|$

5.6. Konsistenz, Stabilität und Konvergenz bei MV

Satz 5.9 Das MV (2) sei konvergent und F genüge den Bedingungen (3) und (4). Dann gilt:

$$(2) \text{ ist konvergent} \iff (2) \text{ ist stabil.}$$

Beweis: O.B.d.A. sei $a_r = 1$, die erweiterte Verfahrensformel sei:

$$(6) \quad \begin{cases} \eta_j = y_j + \epsilon_j, & j = 0, 1, \dots, r-1 \\ \eta_{j+r} + a_{r-1}\eta_{j+r-1} + \dots + a_0\eta_j = hF(x_j, \eta_{j+r}, \dots, \eta_j, h, f) + h\epsilon_{j+r} \end{cases}$$

Wir setzen voraus: $|\epsilon_j| \leq \rho(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ zunächst für $j = 0, 1, \dots, r-1$ (und damit auch für $j = r, r+1, \dots$)

Bereits gezeigt: Unter den gegebenen Voraussetzungen ist die Stabilität notwendig für die Konvergenz des Verfahrens.

Noch zu zeigen: Unter den gegebenen Voraussetzungen ist die Stabilität sogar hinreichend für die Konvergenz des Verfahrens.

Im folgenden sei $y = y(x)$ die exakte Lösung des AWP's $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$, weiter sei $h > 0, x_i = x_0 + hi, y_i := y(x_i)$ und $\eta_i, i = r, r+1, \dots$ seien die Näherungen an y_i vermöge (6). Für den Fehler $e_i = \eta_i - y_i$ gilt: $e_i = \epsilon_i$ für $i = 0, 1, \dots, r-1$ und mit $\tau_{j+r} := \tau(x_j, y_j, \dots, y_{j+r}, h)$ und

$$y_{j+r} + a_{r-1}y_{j+r-1} + \dots + a_0y_j = hF(x_j, y_{j+r}, \dots, y_j, h, f) + h\tau_{j+r} \quad (6a)$$

Bilde nun die Differenz (6) – (6a):

$$e_{j+r} + a_{r-1}e_{j+r-1} + \dots + a_0e_j = c_{j+r} \quad \text{für } j = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

mit $c_{j+r} = h[F(x_j, \eta_{j+r}, \dots, \eta_j, h, f) - F(x_j, y_{j+r}, \dots, y_j, h, f)] + h(\epsilon_{j+r} + \tau_{j+r})$

Wegen der Konsistenz existiert ein $\sigma(h)$ mit $|\tau_{j+r}| \leq \sigma(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ und wegen der verallgemeinerten Lippschitzbedingung (4) gilt:

$$|F(x_j, \eta_{j+r}, \dots, \eta_j, h, f) - F(x_j, y_{j+r}, \dots, y_j, h, f)| \leq M \sum_{k=0}^r |\eta_{j+k} - y_{j+k}| = M \sum_{k=0}^r |e_{j+k}|$$

Hiermit gilt für c_{j+r} :

$$|c_{j+r}| \leq |h|M \sum_{k=0}^r |e_{j+k}| + |h|(\rho(h) - \sigma(h)) \quad (8)$$

Setze $E_j := (e_j, e_{j+1}, \dots, e_{j+r-1})^t, B := (0, \dots, 0, 1)^t (\in \mathbb{R}^r)$ und

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{r-2} & -a_{r-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times r}$$

5. Numerische Behandlung von AWP

Damit

$$(9) \quad \begin{cases} E_0 = (\epsilon_0, \dots, \epsilon_{r-1})^t \\ E_{j+1} = AE_j + c_{j+r}B, j = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Nach dem Einschub besitzt A als Eigenwerte die Nullstellen von

$$p(\lambda) = \lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \dots + a_0$$

Stabilität des Verfahrens: alle Nullstellen von p und damit alle Eigenwerte von A sind vom Betrag ≤ 1 . Damit gilt für den Spektralradius $\hat{\rho}$ von A : $\hat{\rho}(A) \leq 1$. Für jede zugeordnete Matrixnorm $\|\cdot\|$ war $\hat{\rho}(A) \leq \|A\|$.

Da aber $\hat{\rho}(A) \leq 1$ existiert sogar eine Vektornorm $\|\cdot\|_*$, so dass für die zugeordnete Matrixnorm gilt: $\|A\|_* = 1$.

Wir betrachten nun die Betragssummennorm $\|\cdot\|_1$. Es ist insbesondere $\|E_j\|_1 = \sum_{i=0}^{r-1} |e_{j+i}|$. Nach dem Einschub sind alle Vektornormen äquivalent. Deshalb existiert eine Konstante $m > 0$, so dass für die Vektornorm $\|\cdot\|_*$ gilt:

$$\frac{1}{m} \|E_j\|_* \leq \|E_j\|_1 = \sum_{i=0}^{r-1} |e_{j+i}| \leq m \|E_j\|_* \quad (9a)$$

O.B.d.A. gelte für dieses m :

$$\frac{1}{m} \|B\|_* \leq \|B\|_1 = 1, \text{ also } \|B\|_* \leq m$$

Wegen $\sum_{i=0}^{r-1} |e_{j+i}| \leq m \|E_j\|_*$ und damit $\sum_{i=1}^r |e_{j+i}| \leq m \|E_{j+1}\|_*$ folgt aus (8)

$$|c_{j+r}| \leq |h|Mm (\|E_j\|_* + \|E_{j+1}\|_*) + |h|(\rho(h) + \sigma(h))$$

Hieraus folgt für (9) :

$$\begin{aligned} \|E_{j+1}\|_* &\leq \underbrace{\|A\|_*}_{=1} \|E_j\|_* + |c_{r+j}| \underbrace{\|B\|_*}_{\leq m} \\ &\leq \|E_j\|_* + |h|Mm^2 (\|E_j\|_* + \|E_{j+1}\|_*) + |h|m(\rho(h) + \sigma(h)) \end{aligned}$$

also weiter

$$(1 - |h|Mm^2) \|E_{j+1}\|_* \leq (1 + |h|Mm^2) \|E_j\|_* + |h|m(\rho(h) + \sigma(h)) \quad (10)$$

Und insbesondere aus (9a) für $j = 0$ und $e_j = \epsilon_j$:

$$\frac{1}{m} \|E_0\|_* \leq \|E_0\|_1 = \sum_{j=0}^{r-1} |\epsilon_j| \leq r\rho(h)$$

5.6. Konsistenz, Stabilität und Konvergenz bei MV

also $\|E_0\|_* \leq mr\rho(h)$.

Für $|h| \leq \frac{1}{2Mm^2}$ ist $(1 - |h|Mm^2) > 0$ und

$$\begin{aligned} \frac{1 + |h|Mm^2}{1 - |h|Mm^2} &\leq 1 + 4|hMm^2| \\ \iff 1 + |h|Mm^2 &\leq 1 + 4|hMm^2| - |h|Mm^2 - 4h^2M^2m^4 \\ \iff 2|h|Mm^2 - 4h^2M^2m^4 &\geq 0 \\ \iff 1 - 2hMm^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt wegen:

$$1 - 2|h|Mm^2 \geq 0 \iff 1 - |h|Mm^2 \geq |h|Mm^2 > 0$$

Damit ergibt sich für $|h| \leq \frac{1}{2Mm^2}$ aus (10)

$$\|E_{j+1}\|_* \leq (1 + 4hMm^2) \|E_j\|_* + 2m|h|(\rho(h) + \sigma(h))$$

Wir benutzen das Lemma 5.1, es folgt:

23.07.2003

$$|\xi_n| \leq e^{n\delta} |\xi_0| + \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta} B$$

Hier $|\xi_i| = \|E_i\|_*$, $\delta = 4|h|Mm^2$, $B = 2m|h|(\rho(h) + \sigma(h))$, Voraussetzungen sind offensichtlich erfüllt. Damit folgt:

$$\|E_n\|_* \leq e^{4n|h|Mm^2} mr\rho(h) + \frac{e^{4n|h|Mm^2} - 1}{4|h|Mm^2} 2m|h|(\rho(h) + \sigma(h))$$

mit $x \neq x_0$, $h = hn = \frac{x - x_0}{n}$, $|h_n| \leq \frac{1}{2Mm^2}$, also insbesondere $nh_n = x - x_0$ folgt

$$\|E_n\|_* \leq e^{4|x-x_0|Mm^2} mr\rho(h) + \frac{e^{4|x-x_0|Mm^2} - 1}{2Mm} (\rho(hn) + \sigma(hn))$$

Es existieren also Konstanten c_1, c_2 mit

$$\|E_n\|_* \leq c_1\rho(hn) + c_2 + \sigma(hn) \xrightarrow{hn \rightarrow 0} 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$$

$$\text{d. h. } E_n \xrightarrow[\substack{hn \rightarrow 0 \\ [n \rightarrow \infty]}]{\substack{0 \\ \vdots \\ 0}}$$

Also

$$|e_n| = |\eta(x, \epsilon_j, hn) - y(x)| \xrightarrow[\substack{hn \rightarrow 0 \\ [n \rightarrow \infty]}]{0}$$

(\Rightarrow Globale Konvergenz) ■

5.7. Lineare Mehrschrittverfahren

Wir betrachten im folgenden lineare MV der Form

$$a_r y_{j+r} + a_{r-1} y_{j+r-1} + \dots + a_0 y_j = h (b_r f(x_{j+r}, y_{j+r}) + \dots + b_0 f(x_j, y_j)) \quad (1)$$

mit $a_0 \cdot a_r \neq 0$ und Startwerten y_0, y_1, \dots, y_{r-1}

Bemerkung:

$b_r \neq 0$: Korrektorverfahren, $b_r = 0$: Predictorverfahren

Es sei $f \in F_1$. Wir betrachten die Eigenschaften (3) und (4) aus dem vorigen Abschnitt:

$$F(x, y_r, \dots, y_0, h, 0) = h (b_r \cdot 0 + \dots + b_0 \cdot 0) \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{trivialerweise erfüllt}) \quad (3)$$

$$f \text{ diffbar nach } y \text{ (Anw. des MWS bzgl. } y) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} |F(x, y_r, \dots, y_0, h, f) - F(x, \tilde{y}_r, \dots, \tilde{y}_0, h, f)| &\leq |h| \left(\sum_{s=0}^r |b_s| |f(x_s, y_s) - f(x_s, \tilde{y}_s)| \right) \\ &\leq |h| \left(\sum_{s=0}^r |b_s| |f'(y_s, \eta_s)| \cdot |y_s - \tilde{y}_s| \right) \leq c \sum_{s=0}^r |y_s - \tilde{y}_s| \quad (\text{verallg. Lippschitz-Bed.}) \\ &\text{mit } c := |h| \max_s |b_s| |f'(x_s, \eta_s)| \end{aligned}$$

Also ist (4) ebenfalls erfüllt.

Folgerung: $f \in F_1$:

- (1) ist konvergent \Rightarrow (1) ist stabil
- (1) ist stabil und konsistent \Rightarrow (1) ist konvergent

Wir werden zeigen: Jedes konvergente lineare MV ist konsistent

D.h. für lineare MV gilt: (1) ist konvergent \iff (1) ist stabil und konsistent.

Zuvor eine äquivalente Definition der Konsistenz, sei hierzu $z = z(f)$ Lösung des AWP:
 $z'(t) = f(t, z), z(x) = y$

Lokaler Diskretisierungsfehler (bei lineare MV)

$$\begin{aligned} h\tau(x, t, h) &= \sum_{s=0}^r a_s z(x + sh) - h \sum_{s=0}^r b_s f(x + sh, z(x + sh)) \\ &= \sum_{s=0}^r a_s z(x + sh) - h \sum_{s=0}^r b_s z'(x + sh) \end{aligned} \quad (2)$$

Wir nehmen an, dass z hinreichend oft diffbar ist (z.B. gewährleistet bei hinreichend oft diffbarem f).

Taylorentwicklung von $h\tau(x, y, h)$ nach h um $h = 0$,

$$h\tau(x, y, h) = c_0 z(x) + c_1 z'(x)h \dots + c_p z^{(p)}(x)h^p + O(h^{p+1}) \quad (3)$$

Hierbei sind die c_i konstant und unabhängig von z und h . Für die Berechnung von c_0 und c_1 betrachten wir als Vorbereitung

24.07.2003

- $h\tau(x, y, h)|_{h=0} = \sum_{s=0}^r a_s z(x) + 0$

-

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh} (h\tau(x, y, h))|_{h=0} &= \frac{d}{dh} \left(\sum_{s=0}^r a_s (x + sh) - h \sum_{s=0}^r b_s z'(x + sh) \right) |_{h=0} \\ &= \left(\sum_{s=0}^r s a_s z'(x + sh) - \sum_{s=0}^r b_s z'(x + sh) - h \sum_{s=0}^r s b_s z''(x + sh) \right) |_{h=0} \\ &= \sum_{s=0}^r s a_s z'(x) - \sum_{s=0}^r b_s z'(x) + 0 \end{aligned}$$

Nach der obigen Bereitstellung der Ableitung lässt sich nun die Taylorentwicklung von $h\tau(x, y, h)$ nach h um $h = 0$ angehen:

$$h\tau(x, y, h)|_{h=0} + \frac{\frac{d}{dh} (h\tau(x, y, h))|_{h=0}}{1} \cdot h + O(h^2)$$

also mit obigen Werten:

$$\sum_{s=0}^r a_s z(x) + \left(\sum_{s=0}^r (s a_s - b_s) \cdot z'(x) \right) h + O(h^2)$$

Koeffizientenvergleich:

$$c_0 = \sum_{s=0}^r a_s = a_0 + a_1 + \dots + a_r$$

$$c_1 = \sum_{s=0}^r (s a_s - b_s) = (0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1 + \dots + r \cdot a_r) - (b_0 + b_1 + \dots + b_r)$$

$$\begin{aligned} \text{Setze } p(\lambda) &:= a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_r \lambda^r \\ g(\lambda) &:= b_0 + b_1 \lambda + \dots + b_r \lambda^r \\ (p'(\lambda) &= a_1 + 2a_2 \lambda + \dots + r a_r \lambda^{r-1}) \end{aligned}$$

5. Numerische Behandlung von AWP

Dann kann man auch schreiben $c_0 = p(1), c_1 = p'(1) - g(1)$, damit gilt für den lokalen Diskretisierungsfehler

$$\begin{aligned}\tau(x, y, h) &= \frac{1}{h} (c_0 z(x) + c_1 z'(x)h + O(h^2)) \\ &= \frac{c_0}{h} z(x) + c_1 z'(x) + O(h)\end{aligned}$$

Es folgt: der lokale Diskretisierungsfehler geht genau dann gegen 0 für $h \rightarrow 0$, wenn $c_0 = c_1 = 0$ ist, bzw.:

Ein lineares MV ist konsistent $\iff c_0 = c_1 = 0 \iff p(1) = 0 \wedge p'(1) = g(1)$

Bemerkung:

- ein konsistentes Verfahren hat mindestens die Ordnung 1
- es sei $f \in F_1$ und $c_0 = c_1 = \dots = c_p = 0, c_{p+1} \neq 0$, dann besitzt das Verfahren die Ordnung p

Folgerung: Das Verfahren

$$a_r y_{j+r} + \dots + a_0 y_j = h \sum_{s=0}^r b_s f(x_{j+s}, y_{j+s}) \quad (1)$$

ist genau dann konsistent, wenn gilt $p'(1) = g(1)$ mit $p(\lambda) = \sum_{s=0}^r a_s \lambda^s$ und $g(\lambda) = \sum_{s=0}^r b_s \lambda^s$

Satz 5.10 Jedes konvergente lineares MV ist konsistent.

Beweis: Noch zu zeigen: $c_0 = c_1 = 0$

- Betrachte das AWP: $y' = 0 [= f(x, y)], y(0) = 1 \Rightarrow$ eindeutige Lösung $y(x) = 1$.
(1) ergibt $a_r y_{j+r} + \dots + a_0 y_j = 0$, aus der Konvergenz $y_j \rightarrow 1$ für $h \rightarrow 0$ folgt:

$$a_r + a_{r-1} + \dots + a_0 = c_0 = 0 (\Rightarrow p(1) = 0)$$

- Betrachte das AWP $y' = 1 [= f(x, y)], y(0) = 0 \Rightarrow$ eindeutige Lösung $y(x) = x$
(1) ergibt

$$a_r y_{j+r} + \dots + a_0 = h (b_r + b_{r-1} + \dots + b_0) \quad j=0,1,2$$

Das Verfahren ist konvergent, also ist das Verfahren stabil. Insbesondere ist 1 keine doppelte Nullstelle von $p(\lambda) = a_r \lambda^r + \dots + a_0$. D.h. $p'(z) = r \cdot a_r + \dots + 1 \cdot a_1 =: c \neq 0$. Setze $q := \frac{1}{c} (b_r + \dots + b_0)$.

Starte das Verfahren (1) mit den Werten $y_k = hqk, k = 0, 1, \dots, r-1$ (insbesondere $y_k \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$)

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
 & a_r a_r + a_{r-1} y_{r-1} qh + \dots + a_0 y_0 = h(b_r + \dots + b_0) \\
 \text{bzw. } & a_r y_r + a_{r-1}(r-1)qh + \dots + a_1 qh + 0 = h(b_r + \dots + b_0) \\
 \text{also } & a_r y_r + hq((r-1)a_{r-1} + \dots + a_1) = h(b_r + \dots + b_0) \\
 \text{oder } & a_r y_r + hq \left(\underbrace{r \cdot a_r + \dots + 1 \cdot a_1}_{=c} - r \cdot a_r \right) = h \underbrace{(b_r + \dots + b_0)}_{q \cdot c} \quad (4)
 \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
 & a_r y_r + hqc - hqra_r = hqc \\
 \text{bzw. } & y_r = qrh
 \end{aligned}$$

Behauptung: Es gilt $y_{j+r=q(j+r)}h$

Beweis: (durch Induktion)

$j = 0$: ok

$k \leq j - 1$: ok

$k = j$:

$$\begin{aligned}
 & a_r y_{j+r} + \dots + a_j y_j = h(b_r + \dots + b_0) \\
 & a_r y_{j+r} + (a_r q(j+r)h + a_{r-1} q(j+r-1)h + \dots + \\
 & \quad a_0 qj h - a_r q(j+r)h) = h(b_r + b_0) \\
 \text{bzw. } & a_r y_{j+r} + (qj h) \left(\underbrace{a_r + \dots + a_0}_{=0} + \right. \\
 & \quad \left. hq \left(\underbrace{r \cdot a_r + \dots + 1 \cdot a_1}_{=c} - a_r q(j+r)h \right) \right) = h(b_r + \dots + b_0)
 \end{aligned}$$

Also mit (4) :

$$a_r y_{j+r} + hqc - a_r q(j+r)h + h = hqc$$

und damit

$$y_{j+r} = q(r+1)h = [qj h + qrh]$$

5. Numerische Behandlung von AWP

Aus der Konvergenz-Bed.:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ jh = \xi}} y_j = y(\xi) = \xi$$

folgt $y_{j+r} = qjh + qrh = q\xi + qrh$. Die linke Seite hat den Grenzwert ξ und die rechte Seite den Grenzwert $q\xi$ für $h \rightarrow 0$, also $q = 1$ oder $c = b_r + \dots + b_0 = r \cdot a_r + 1 \cdot a_1$ bzw. $g(1) = p'(1)$ und damit $c_1 = 0$. ■

Satz 5.11 Ein lineares MV ist genau dann für $f \in F_1$ konvergent, wenn es konsistent und stabil ist.

30.07.2003

5.8. Konstruktion von linearen MV

Im folgenden sei $f_j := f(x_j, y_j)$.

Satz 5.12 Ein lineares MV der Form (1) ist genau dann von p -ter Ordnung, wenn die Funktion

$$\varphi(\lambda) := \frac{p(\lambda)}{\log \lambda} - g(\lambda)$$

in $\lambda = 1$ eine p -fache Nullstelle hat.

Beweis: Der lokale Diskretisierungsfehler konnte nach (3) dargestellt werden, als

$$h\tau(x, y, h) = c_0 z(x) + c_1 z'(x)h + \dots + c_{p+1} z^{(p+1)}(x)h^{p+1}$$

\Rightarrow : Setze speziell $z = e^x$: Nach (2) gilt

$$\begin{aligned} h\tau(x, y, h) &= \sum_{s=0}^r a_s z(x + sh) - h \sum_{s=0}^r b_s z'(x + sh) = \sum_{s=0}^r a_s e^{x+sh} - h \sum_{s=0}^r b_s e^{x+sh} \\ &= e^x \left(\sum_{s=0}^r a_s e^{sh} - \sum_{s=0}^r b_s e^{sh} \right) \quad \text{beachte: } e^{sh} = (e^h)^s \\ &= e^x \left(p(e^h) - hg(e^h) \right) \stackrel{!}{=} e^x c_{p+1} h^{p+1} + O(h^{p+1}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow e^x (p(e^h) - hg(e^h)) = e^x c_{p+1} h^{p+1} + O(h^{p+2})$, bzw. nach Division durch h (und e^x):

$$\varphi(e^h) = \frac{\varphi(e^h)}{h} - g(e^h) = c_{p+1} h^p + O(h^{p+1})$$

D.h. $\varphi = \varphi(e^h)$ besitzt in $h = 0$ eine p -fache Nullstelle bzw. mit $h = \log \lambda$ besitzt $\varphi = \varphi(\lambda)$ in $\lambda = 1$ eine p -fache Nullstelle.

⇐: analog dem vorigen Fall folgt:

$$\begin{aligned} h\tau(x, y, h) &= e^x \left(p(e^h) - hg(e^h) \right) \\ &= e^x \left(c_0 + c_1h + \dots + c_ph^p + c_{p+1} + O(h^{p+2}) \right) \\ \text{bzw. } \varphi(e^h) &= \frac{p(e^h)}{h} - g(e^h) \\ &= \frac{c_0}{h} + c_1 + c_2h + \dots + c_ph^{p-1} + c_{p+1}h^p + O(h^{p+1}) \end{aligned}$$

$\varphi = \varphi(\lambda)$ besitzt p -fache Nullstelle in $\lambda = 1 \Rightarrow \varphi = \varphi(e^h)$ besitzt p -fache Nullstelle in $h = 0 \Rightarrow \varphi(e^h) = c_{p+1}h^p + O(h^{p+1})$, also insbesondere $c_0 = c_1 = \dots = c_p = 0$
 \Rightarrow Verfahren von p -ter Ordnung

■

Folgerung:

- Zu gegebenen Konstanten a_0, \dots, a_r (d.h. zu gegebenem $p(\lambda)$) bestimme man ein Polynom

$$g(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \dots + b_r\lambda^r$$

so dass ein Verfahren möglichst hoher Ordnung entsteht. Hierzu entwickeln wir $\frac{p(\lambda)}{\log \lambda}$ um $\lambda = 1$ in eine Taylorreihe:

$$\frac{p(\lambda)}{\log \lambda} = c_0 + c_1(\lambda - 1) + \dots + c_r(\lambda - 1)^r + \dots$$

Wählt man $g(\lambda) = c_0 + c_1(\lambda - 1) + \dots + c_r(\lambda - 1)^r =: b_0 + b_1\lambda + \dots + b_r\lambda^r$, so ergibt sich ein Korrekterverfahren (mindestens) der Ordnung $r + 1$. Wählt man $g(\lambda) = c_0 + c_1(\lambda - 1) + \dots + c_{r-1}(\lambda - 1)^{r-1} =: b_0 + b_1\lambda + \dots + b_{r-1}\lambda^{r-1}$, so erhält man ein Prediktorverfahren (mindestens) der Ordnung r (Stabilität!)

- Um zu einem Verfahren höherer Ordnung zu gelangen könnte man die noch freien Koeffizienten so variieren, dass

1. $a_r + a_{r-1} + \dots + a_0 = 0$

2. $c_{r+1} + \dots + c_{2r-1} = 0$

ist (\leadsto Verfahren der Ordnung $2r$)

Jedoch sind die so konstruierten Verfahren nicht konvergent, da sie nicht stabil sind.

Es wurde bereits gezeigt: Ein lineares r -Schritt Verfahren ist maximal von der Ordnung $r + 2$.

5. Numerische Behandlung von AWP

Beispiel: 5.9 $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{2}) = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}$ (stabil!) $\rightsquigarrow y_{n+2} - \frac{1}{2}y_{n+1} - \frac{1}{2}y_n$.

$G(\lambda) := \frac{p(\lambda)}{\log \lambda}$ in Taylorreihe um $\lambda = 1$ entwickeln:

$$G(\lambda) = G(1) + \frac{G'(1)}{1!}(\lambda - 1) + \frac{G''(1)}{2!}(\lambda - 1)^2 + R_3$$

$$G'(\lambda) = \frac{(2\lambda - \frac{1}{2})\log \lambda - (\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2})\frac{1}{\lambda}}{(\log \lambda)^2} = \frac{2\lambda \log \lambda - \frac{1}{2}\log \lambda - \lambda + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda}}{(\log \lambda)^2}$$

und damit $G'(1) = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{2\lambda \log \lambda - \frac{1}{2}\log \lambda - \lambda + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda}}{(\log \lambda)^2}$

(L'Hospital) $= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{2\log \lambda + 2 - \frac{1}{2\lambda} - 1 - \frac{1}{2\lambda^2}}{2\log \lambda \frac{1}{\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{2\lambda \log \lambda + 2\lambda - \frac{1}{2} - \lambda - \frac{1}{2\lambda}}{2\log \lambda}$

(nochmals L'Hospital) $= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{2\log \lambda + 2 + \frac{1}{2\lambda^2}}{\frac{2}{\lambda}} = \frac{7}{4}$

Analog bestimmt man $G''(1) = \frac{3}{4}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{p(\lambda)}{\log \lambda} &= \frac{3}{2} + \frac{7}{4}(\lambda - 1) + \frac{3}{2 \cdot 4}(\lambda - 1)^2 + R_3 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{7}{4} + \frac{3}{8} + \lambda \left(\frac{7}{8} - \frac{3}{4} \right) + \lambda^2 \frac{3}{8} \\ &= \frac{1}{8} + \lambda + \frac{3}{8}, \text{ also } b_2 = \frac{3}{8}, b_1 = 1, b_0 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Unser MV lautet: $y_{n+2} - \frac{1}{2}y_{n+1} - \frac{1}{2}y_n = h \left(\frac{3}{8}f_{n+2} + f_{n+1} + \frac{3}{8}f_n \right)$

Bemerkung:

Die Ordnung eines Verfahrens kann man auch über das Einsetzen von Testfunktionen $1, x, x^2, \dots$ ermitteln. $n = 0, y_2 - \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_0, y_1 = (x + h), y = (x + 2h)$:

1. $y(x) = 1, y' = f(x, y) \rightsquigarrow f(x, y) \equiv 0: 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ok
2. $y(x = y) \Rightarrow f(x, y) \equiv 1: x + 2h - \frac{1}{2}(x + h) - \frac{1}{2}x = h \left(\frac{3}{8} + 1 + \frac{1}{8} \right)$ ok
3. $y(x) = x^2 (\Rightarrow f(x, y) = 2x): (x + 2h)^2 - \frac{1}{2}(x + h)^2 - \frac{1}{2}x^2 = h \left(\frac{3}{4}(x + 2h) + 2(x + h) + \frac{h}{4} \right)$
ok
4. $y(x) = x^3 \Rightarrow f(x, y) = 3x^2: (x + 2h)^3 - \frac{1}{2}(x + h)^3 - \frac{1}{2}x^3 = h \left(\frac{9}{8}(x + 2h)^2 + 3(x + h)^2 + \frac{3}{8}x^2 \right)$
ok
5. $y(x) = x^4 \Rightarrow f(x, y) = 4x^3:$

$$\begin{aligned} &(x + 2h)^4 - \frac{1}{2}(x + h)^4 - \frac{1}{2}x^4 \\ &h \left(\frac{3}{2}(x + 2h)^3 + 4(x + h)^3 + \frac{1}{2}x^3 \right) \end{aligned}$$

5.8. Konstruktion von linearen MV

Diese Gleichung stimmt nicht mehr \Rightarrow Verfahren der Ordnung 3.

5. Numerische Behandlung von AWP

Symbolverzeichnis

$\|\cdot\|$, 28

$\mathfrak{D}(g)$, 45

$\mathfrak{o}(g)$, 45

$\Delta(x, y, h)$, 41

$\tau(x, y, h)$, 41

$e(x, h)$, 41

$\|\cdot\|_1$, 58

$\|\cdot\|_2$, 58

$\|\cdot\|_\infty$, 58

e^B , 22

$L_m(V)$, 57

AB, 27

AB_n, 20

AWP, 5

E, 20

EV, 41

GDGl, 3

MV, 49

Index

- Anfangswertproblem, 5
- Banachraum, 29
- Cauchy-Folge, 29
- Differentialgleichung
 - allgemeine Form, 3
 - explizite, 3
 - gewöhnlich, 3
 - homogene, 7
 - implizite, 3
 - Ordnung, 3
 - partielle, 3
- Differenzgleichung der Ordnung r , 53
- Differenzenquotient, 41
- Diskretisierungsfehler, 56
 - global, 41
 - lokal, 41
 - lokaler D. bei linearen MV, 62
- Dreiecksungleichung, 28
- Einschrittverfahren
 - spezielle EV., 44
- Exponentialmatrix, 22
- Fibonacci Zahlen, 54
- Fundamentalsystem, 8, 18
- Funktional, 29
- Hauptvektor, 26
- konsistent, 56
- Konsistenzbedingung, 41
- konvergent
 - Einschrittverfahren, 41
- Konvergenz
 - bei MV, 56
- Korrektorverfahren, 53
- Lagrangesches Grundpolynom, 50
- Landau-Symbole, 45
- linear abhängig, 18
- linear unabhängig, 7, 18
- Lippschitz Bedingung, 29
- Matrixnorm
 - Vektornorm zugeordnete M , 57
- Metrik, 28
- Norm
 - l_∞ , 29
 - Betragsmaximums $N.$, 28
 - Betragssummen $N.$, 28
 - Betragssummenn., 58
 - euklidische, 28, 58
 - Maximumsnorm, 58
 - Spaltensummenn., 58
 - Spektralnrm, 58
 - Tschebyscheff, 29
 - Zeilensummennorm, 58
- Norm auf L , 28
- Operator, 29
 - kontrahierender, 30
 - linearer, 29
- Partikuläre Lösung, 8
- Polynom
 - charakteristisches, 9
- Predictorverfahren, 53
- Raum
 - linearer, 27
 - metrischer, 28
 - normierter, 28
- Runge-Kutta-Formel
 - vereinfachte, 46
- Satz**
 - Banachscher Fixpunktsatz, 30
 - Existenz- und Eindeutigkeitssatz v. Picard Lindelöf, 32
 - Existenzs. v. Peano, 34
 - Superpositionsprinzip, 8
- stabil
 - bei MV, 56
- System von Differentialgleichungen, 4
- Variation der Konstanten, 11

Verfahren

Adams-Bashforth, 52

Adams-Moulton, 52

allgemeines Einschrittverfahren, 40

Euler, 39

explizite V., 53

implizite V., 53

Lineare Mehrschrittverfahren, 62

Milne Thompson, 53

modifiziertes Euler V., 47

Nyström, 52

von Heun, 47

Wronski-Determinante, 18

Wronski-Matrix, 18